

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского
«Харьковский авиационный институт»

В. М. Онищенко

СВОБОДНЫЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНСТРУКЦИИ ЛА
С НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Учебное пособие

Харьков «ХАИ» 2016

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского
«Харьковский авиационный институт»

В. М. Онищенко

СВОБОДНЫЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНСТРУКЦИИ ЛА
С НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Учебное пособие

Харьков «ХАИ» 2016

В. М. Онищенко

СВОБОДНЫЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНСТРУКЦИИ ЛА
С НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

2016

УДК 629.735.33.025.015(075.8)

ББК 39.53я7

О-59

Розглянуто механічні системи конструкції літальних апаратів, що зводяться до спрощених розрахункових схем з одним або двома степенями вільності. Особливу увагу приділено способам отримання рівнянь руху механічних систем і аналізу їхніх власних і вимушених коливань. На основі створених математичних моделей (ММ) динаміки конструкції ЛА і її навантаження показано приклади їх числового розрахунку на ЕОМ. Отримано форми і частоти власних коливань спрощених моделей конструкції, проаналізовано динаміку її навантаження в процесі власних і вимушених коливань.

Для студентів, які вивчають дисципліни «Теорія механічних коливань» і «Аеропружність», а також при виконанні курсового проекту з дисципліни «Розрахунки на міцність ЛА».

Рецензенти: д-р техн. наук, проф. В. А. Ванін,
канд. техн. наук, доц. В. М. Грищенко

Онищенко, В. М.

О-59 Собственные и вынужденные колебания конструкции ЛА с несколькими степенями свободы [Текст]: учеб. пособие / В. М. Онищенко. – Х. : Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «Харьк. авиац. ин-т», 2016. –101 с.

Рассмотрены механические системы конструкции летательных аппаратов, которые сводятся к упрощенным расчетным схемам с одной или двумя степенями свободы. Получены формы и частоты собственных колебаний конструкции, проанализирована динамика ее нагружения в процессе собственных и вынужденных колебаний.

Пособие соответствует учебной программе по дисциплине «Теория механических колебаний» и дополняет лекционный курс.

Для студентов, изучающих дисциплины «Теория механических колебаний» и «Аэроупругость конструкций», а также при выполнении курсового проекта по дисциплине «Расчеты на прочность ЛА».

Ил. 66. Табл. 1. Библиогр.: 4 назв.

УДК 629.735.33.025.015(075.8)

ББК 39.53я7

© Онищенко В. М., 2016

© Национальный аэрокосмический
университет им. Н. Е. Жуковского

«Харьковский авиационный институт», 2016

ВВЕДЕНИЕ

Колебания – одно из наиболее распространенных явлений в природе, физике и технике. Для мира, в котором мы живем, характерны колебания. Например, маятник после его отклонения колеблется, мы разговариваем благодаря колебаниям голосовых связок, а слышим – из-за колебаний барабанных перепонки. В результате колебаний был разрушен знаменитый Такоумский мост.

В 1807 г. доктор Томас Юнг сказал: «Многие явления, относящиеся к теории звука и колебаний, столь примечательны и занятны, что труд их исследователя будет стоицей вознагражден тем удовлетворением, которое он при этом получит».

Колебания могут быть полезными и вредными. Очень часто в авиационной технике приходится с ними бороться. Они приводят к разрушению конструкции в основном из-за усталости материала, появлению в нем трещин, вначале медленном, а затем – катастрофически быстром. Иногда интенсивность колебаний очень большая и конструкция разрушается за считанные секунды. Нередко приходится учитывать и физиологические аспекты при действии вибраций. Так, человек, сидящий в кресле, совершающем вертикальные колебания, остро реагирует на частоту около 5 Гц. Заметим, что колебания в диапазоне от 18 до 18000 Гц ощущаются человеком.

С. П. Тимошенко – выходец из Украины, известный в мире специалист в области механики и теории колебаний упругих систем, в предисловии к своей замечательной монографии «Колебания в инженерном деле» писал, что с увеличением размеров и скоростей современных машин становится все более важным при проектировании инженерных конструкций проводить исследования колебаний, возникающих в них.

Изменение формы ЛА в полете и возбуждение колебаний в конструкции может привести к нарушению его нормального функционирования. ЛА может потерять управляемость и устойчивость и даже разрушиться.

Например, на определенных скоростях полета действие на крыло переменных аэродинамических сил и сил инерции, а также взаимодействие деформаций изгиба и кручения крыла может привести к большому притоку энергии от набегающего потока и быстрому разрушению ЛА (рис. 1, 2).

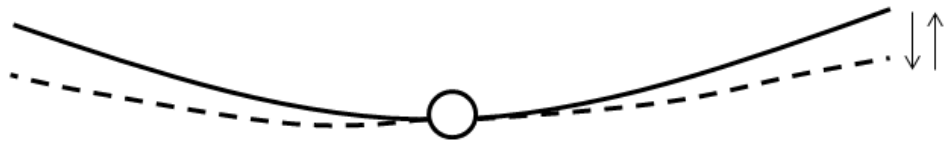


Рис. 1. Изменение формы конструкции и возбуждение в ней колебаний

На рис. 2 показана одна из форм колебаний, которую приобретает крыло при действии на него возмущений, а также изображены изгиб и кручение крыла одновременно.

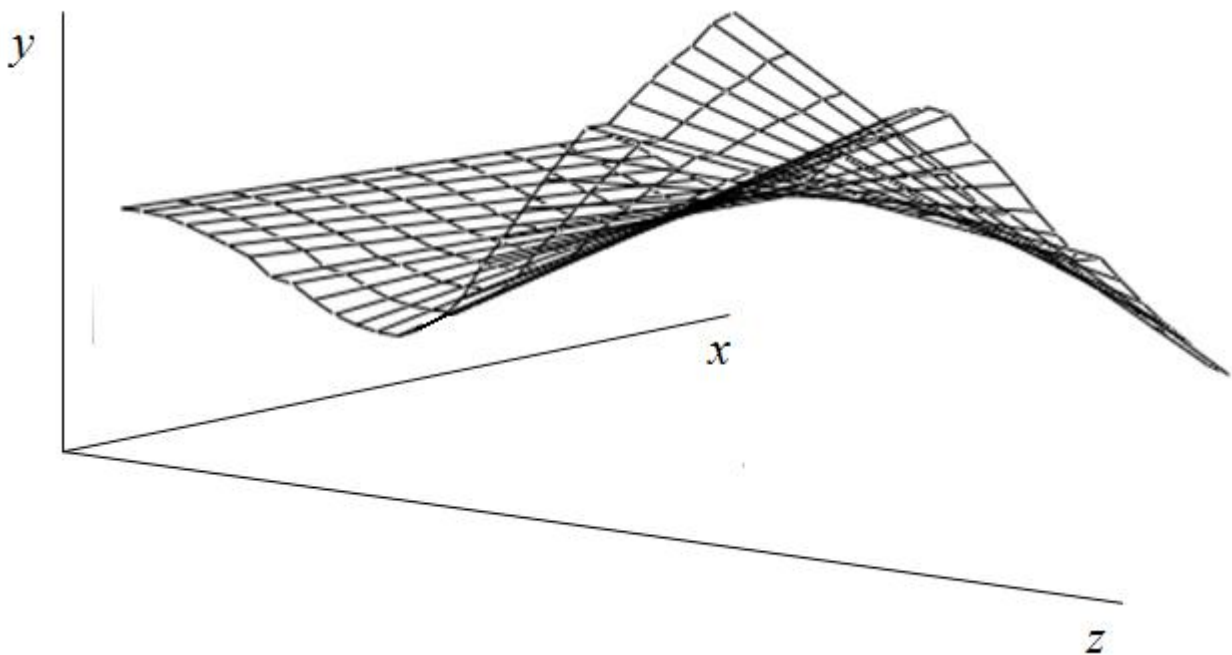


Рис. 2. Форма колебаний крыла в полете

Колебания (вибрации) в конструкции практически всегда присутствуют в процессе ее эксплуатации. Для самолета или вертолета источниками вибраций могут быть двигатели, беспокойная атмосфера, неровности аэродрома, управляющие действия на ЛА со стороны летчика и системы управления и многое другое. В вертолете сильные источники колебаний – несущий винт и другие вращающиеся агрегаты. Для правильного понимания процессов, происходящих в ЛА, необходимо знать динамику авиационной конструкции и ее фундаментальную основу – аэроупругость.

Аэроупругость – это наука, изучающая взаимодействие аэродинамических, упругих и инерционных сил. Она приобретает все большее значение во многих отраслях инженерного дела, особенно в авиации. Современные конструкции характеризуются очень большой гибкостью, являющейся основной причиной различных явлений аэроупругости. В

результате увеличения размеров и скоростей полета аэроупругость – один из наиболее важных факторов, учитываемых при проектировании самолетов и вертолетов. Конструкторы ЛА постоянно сталкиваются с различными проблемами статической и динамической аэроупругости.

Существующие основные физические закономерности показаны на рис. 3.



Рис. 3. Схема исследования явлений аэроупругости

Различные явления аэроупругости отличаются друг от друга по их отношению к силам упругости, инерционным и аэродинамическим силам. Следует различать такие явления: статическую и динамическую устойчивость конструкции, аэродинамическую устойчивость жесткого ЛА и механические колебания.

Явления аэроупругости, как правило, носят сложный характер. Для их исследования применяют комплекс теоретических и экспериментальных методов, которые включают в себя расчетные методы, физическое моделирование, наземные и летные испытания ЛА, а также комбинированные методы, например расчеты с использованием экспериментальных данных. Основу расчетных методов составляют математические модели, отображающие

упругомассовые характеристики конструкции, характеристики системы управления и модели аэродинамических воздействий. При исследованиях аэроупругости применяют метод физического моделирования.

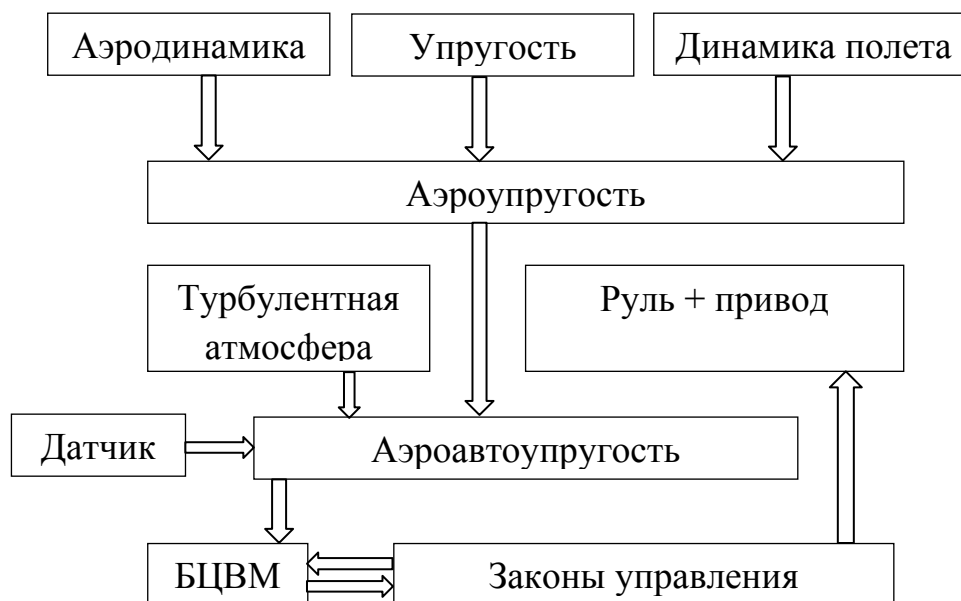


Рис. 4. Решение проблем аэроупругости и аэроавтоупругости

Разрешить проблему аэроупругости в полном объеме можно с помощью нестационарной аэродинамики, теории упругости, колебаний и устойчивости упругих систем, уравнений динамики полета. Учитывая широкое использование бортовых систем для управления ЛА, следует рассматривать явления аэроавтоупругости. Комплексирование базовых наук в аэроупругости и аэроавтоупругости показано на рис. 4.

Из-за ограниченных возможностей наземных экспериментальных установок и летного эксперимента очень важно развитие направления, ориентированного на создание и опережающее функционирование математических моделей (ММ) объектов – математических дублеров.

ММ аэроупругости необходимо использовать на этапах проектирования, эксплуатации и модернизации ЛА. Отметим, что опережающее функционирование математических моделей объектов возможно только при постоянной корректировке модели на базе данных физического моделирования системы и летного эксперимента.

На стадии разработки технического предложения и эскизного проектирования при выборе схемы ЛА и его основных параметров большое значение имеют ММ аэроупругости. Созданная на основе опыта проектирования и расчетов предшествующих вертолетов ММ позволяет

исследовать особенности динамики и нагружения конструкции, условия ее устойчивости.

На стадии технического проектирования основная задача – выбор параметров конструкции. Подробные расчеты следует выполнять с помощью математических моделей, которые постоянно совершенствуются по мере проведения экспериментальных исследований.

При доводке опытного образца и запуске его в серийное производство продолжают доработку ММ. Ошибка в окончательной оценке прочностных характеристик конструкции на этом этапе недопустима.

Летательный аппарат представляет собой сложную систему с пространственной геометрией и распределенными массами и жесткостями, большим количеством сосредоточенных грузов. Он нагружен распределенными аэродинамическими и инерционными силами, в местах крепления грузов или агрегатов действуют сосредоточенные силы. Обеспечение прочности и аэроупругой устойчивости ЛА при проектировании и испытании – важная и сложная задача, так как конструкция должна удовлетворять требованиям высокой безопасности при минимальных массах силовых элементов.

Для регламентирования прочности ЛА созданы Нормы прочности. При проверке соответствия конструкции ЛА требованиям Норм прочности предусмотрен широкий комплекс работ: проведение статических испытаний; определение массовых, жесткостных и частотных характеристик; проверка безопасности от флаттера и других явлений аэроупругости; на выносливость и живучесть; динамических испытаний шасси на копре; летных – на предельных по условиям прочности режимах и измерению нагрузок на основные элементы конструкции.

Основная часть содержания Норм прочности – требования к статической прочности конструкции.

Нормы прочности содержат также требования, направленные на обеспечение безопасности ЛА по условиям аэроупругости (флаттера, дивергенции, реверса органов управления, бафтинга, аэроупругих колебаний в системе "ЛА – САУ", шимми, земного резонанса вертолета и др.). В конструкции ЛА в пределах летного диапазона скоростей не должны возникать опасные явления аэроупругости. Требуется не менее чем 20-процентный запас по скорости по отношению к предельно допускаемой скорости в эксплуатации для критических скоростей аэроупругости. Критической скоростью называют скорость полета, при превышении которой возможно возникновение недопустимых явлений аэроупругости.

Из всех явлений аэроупругости не запрещается лишь наличие бафтинга небольшой интенсивности. При этом требуется, чтобы уровень вибраций был безопасным для конструкции и экипажа.

Одно из наиболее опасных явлений аэроупругости – флаттер, т. е. автоколебания конструкции самолета, происходящие под действием аэродинамических, инерционных и упругих сил. Кроме классического флаттера упругой конструкции ЛА большое значение имеют также различные разновидности автоколебаний упругих частей ЛА, например: флаттеры воздушных винтов, панельный, возникающий при $M > 1$, срывной, сопровождающийся отрывом потока при больших углах атаки, и др.

Одновременно с исследованиями флаттера проводят работы, связанные с оценкой влияния общих деформаций конструкции самолета на его управляемость и изменения аэродинамических характеристик. В частности, определяют критические скорости реверса органов управления и дивергенции крыла.

На боевых ЛА особенно актуальной может быть проблема бафтинга. Бафтинг – это нерегулярные колебания ЛА или отдельных его элементов, вызванные нестационарными аэродинамическими силами при срыве потока. Например, при выпуске в поток тормозного щитка 1 (рис. 5) за ним формируется нестационарная вихревая зона течения. Частота схода вихрей с тормозного щитка такова, что в конструкции хвостового оперения и всего ЛА возбуждаются колебания в широком частотном диапазоне. Интенсивность бафтинга иногда бывает такой, что экипаж из-за вибрации не видит показания приборов, а отдельные элементы конструкции могут разрушиться.

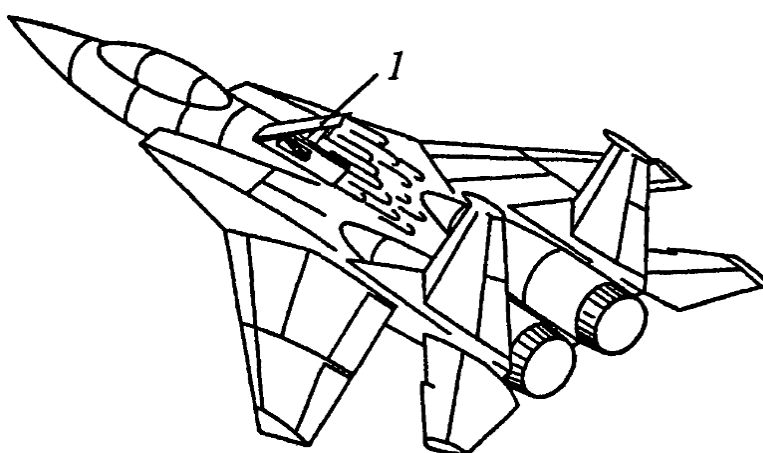


Рис. 5. Бафтинг маневренного самолета

К явлениям динамической аэроупругости и неустойчивости конструкции относят шимми колес летательных аппаратов. Потеря устойчивости движения

шасси самолета, приводящая к опасным автоколебаниям, называется шимми. Эти автоколебания происходят при взаимодействии инерционных, упругих и демпфирующих сил, возникающих в узлах крепления стойки шасси при ее деформационных движениях. С математических позиций задача шимми сводится к установлению условий устойчивости движения, а методы решения имеют много общего с определением критической скорости флаттера.

В отношении шимми требуется, чтобы во всем диапазоне возможных весов и скоростей движения самолета по взлетно-посадочной полосе при взлете и посадке было обеспечено отсутствие шимми колес шасси и подтверждено расчетами и испытаниями стоек шасси на копре с подвижной опорой. Испытания разрешается не проводить, если расчетами или специальными измерениями в процессе летных испытаний доказана безопасность шимми.

Существенное влияние на аэроупругие характеристики оказывают системы автоматического управления (САУ). С одной стороны, они значительно усложняют задачу, а с другой – позволяют бороться и избегать неустойчивого движения упругого ЛА в потоке воздуха. Для работы системы снижения нагрузок требуются быстроедействие мощных бустеров и надежность работы. Несмотря на вносимые при этом затраты, получают как снижение веса конструкции, так и увеличение ее ресурса.

К проблемам аэроупругости относят также определение динамических нагрузок в упругой конструкции самолета при полете в неспокойном воздухе и при посадке. Эти задачи наиболее актуальны для тяжелых самолетов с крыльями большого удлинения.

Динамические нагрузки от неспокойного воздуха в некоторых случаях настолько тяжелы для конструкции, что необходимо принимать меры к их снижению, поэтому разрабатывают различные автоматические системы, уменьшающие нагрузки от движения самолета как твердого тела и упругих колебаний конструкции. При этом исполнительными органами могут быть рули высоты и направления, закрылки, интерцепторы, элевоны и другие отклоняемые поверхности, создающие аэродинамические силы, противодействующие нагрузкам от порывов и оказывающие благоприятное влияние на движение конструкции.

Особенно актуальны задачи динамики и аэроупругой устойчивости для вертолета. Отметим, что вертолет представляет собой сложную аэромеханическую систему с большим количеством вращающихся элементов, идеально несбалансированных, и работающую в сильно возмущенном несимметричном воздушном потоке. В этой системе возможно появление

колебаний различной природы – вибраций, резонансных колебаний и автоколебаний. Лопастей винтов, особенно несущего, могут подвергаться многочисленным формам флаттера, обусловленного взаимосвязью в различных комбинациях колебаний лопастей в плоскостях взмаха и вращения, закручивания, а также податливостью системы управления и винта на его креплении.

Для вертолета характерен так называемый земной резонанс. Вследствие колебаний лопастей несущего винта в плоскости вращения центр тяжести винта движется по замкнутой кривой с некоторой частотой, которая может быть близкой к частоте колебаний вертолета на шасси (отсюда происхождение термина) либо в полете к частоте собственных колебаний фюзеляжа (тогда это явление называют воздушным резонансом).

Земной резонанс может возникнуть на земле из-за больших возмущений, действующих на вертолет. Например, при рулении по полосе и наезде левым колесом на большую кочку лопасти вертолета могут получить большие повороты относительно вертикальных шарниров (рис. 6, вид сверху на вертолет).

Появившаяся в результате этого вращающаяся центробежная сила $F_{цб}$ вызывает интенсивные поперечные колебания фюзеляжа, которые еще больше раскачивают лопасти относительно вертикальных шарниров, и вращающаяся центробежная сила $F_{цб}$ становится еще больше и т. д. Фюзеляж опирается о землю посредством упругих элементов – шасси (рис. 7).

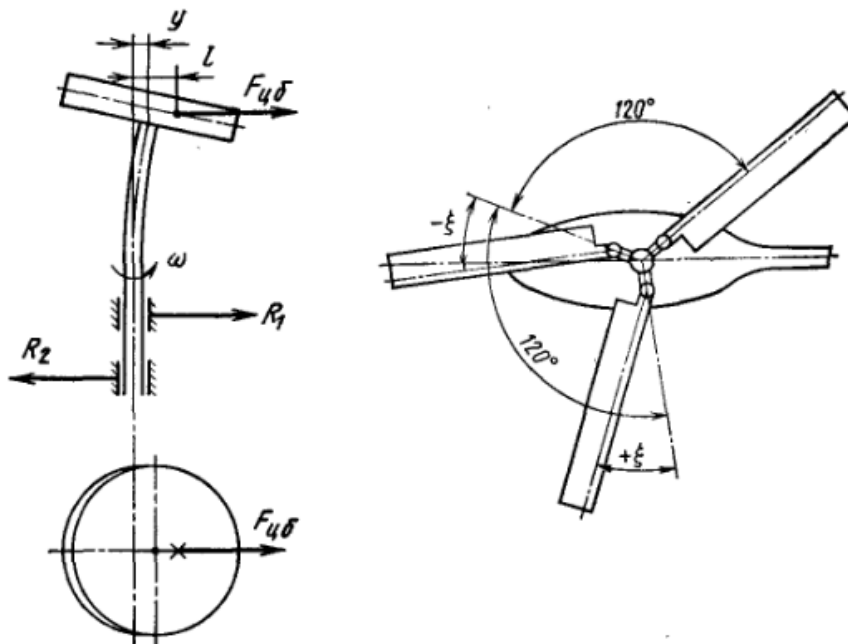


Рис. 6. Земной резонанс вертолета

Вертикальные и горизонтальные пружины моделируют упругие свойства шасси вертолета. На рис. 7 показана одна из форм колебаний, при которой поворот фюзеляжа происходит относительно точки O_2 , расположенной выше центра масс C вертолета.

Взаимодействие поперечных колебаний фюзеляжа и колебаний лопастей относительно шарниров их крепления к втулке винта могут быстро привести к разрушению и даже опрокидыванию вертолета.

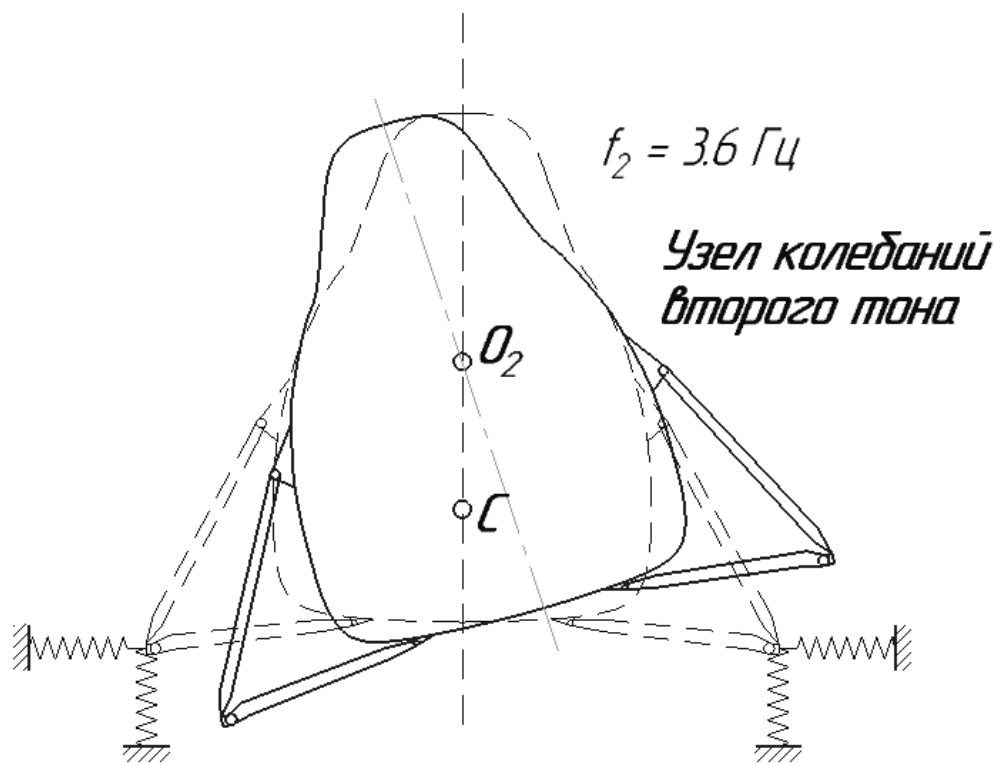


Рис. 7. Поперечные колебания фюзеляжа на упругом шасси

Исследование опасных явлений аэроупругости неразрывно связано с изучением упругих свойств конструкции и определением ее динамических характеристик – частот и форм собственных колебаний, которые зависят от распределения масс и жесткостей по всему ЛА.

ЛА представляют различными схемами – так называемыми расчетными схемами (рис. 8, 9).

Наиболее распространенная динамическая схема для самолетов и вертолетов с несущей поверхностью большого и умеренного удлинения ($\lambda > 3$) – *балочная* (рис. 8, а), где основные агрегаты ЛА (крыло, лопасти несущего винта (НВ), фюзеляж, оперение) заменены эквивалентными балками, имеющими распределенные по длине массы и жесткости. Обычно жесткости на кручение GI_ρ и изгиб EI задают в двух плоскостях – вертикальной и горизонтальной.

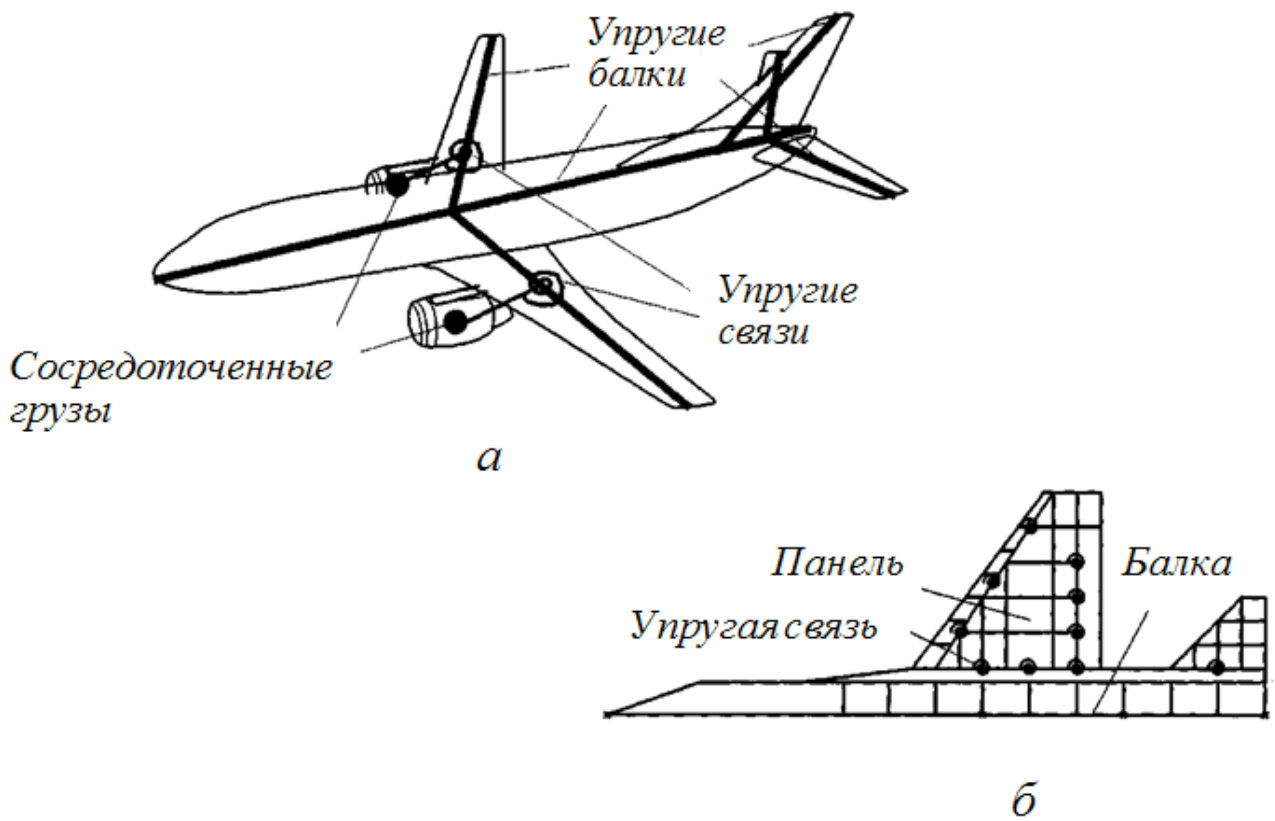


Рис. 8. Расчетные схемы конструкции ЛА транспортной категории:
а – балочная; *б*– пластинчато-балочная

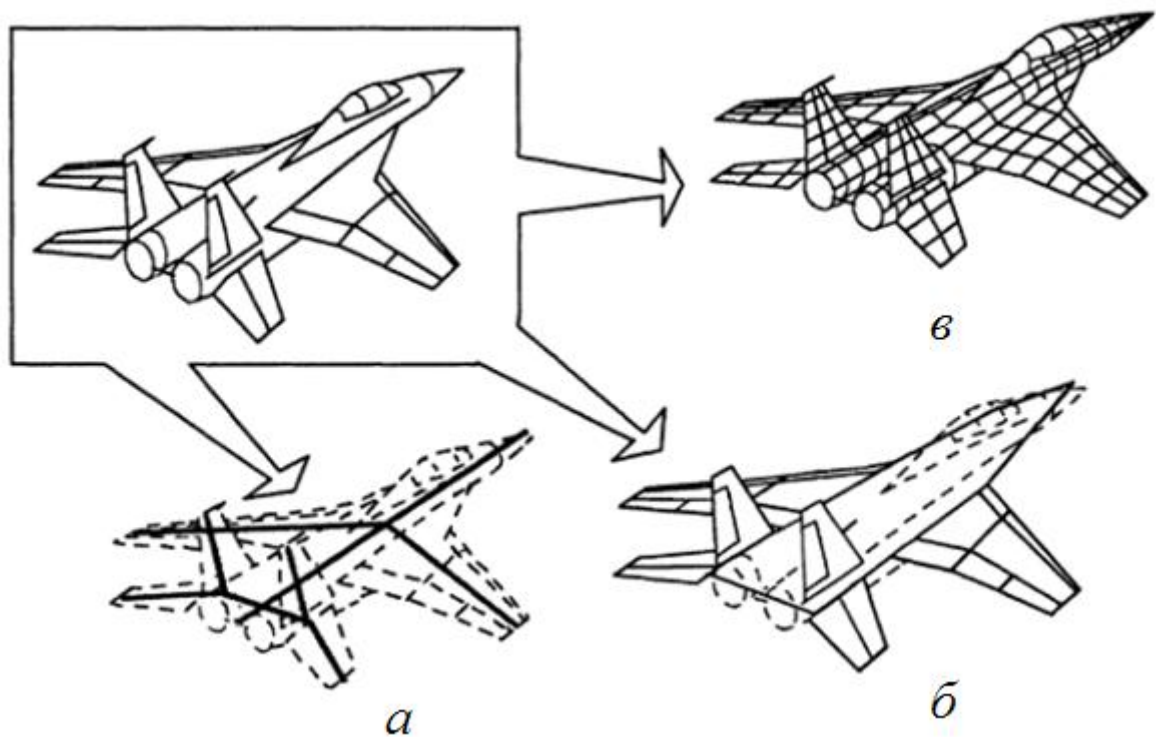


Рис. 9. Расчетные схемы конструкции маневренного ЛА

Каждый агрегат ЛА представлен одной или несколькими балками в зависимости от количества изломов оси жесткости. Стыки балок могут быть как абсолютно жесткими, так и упругими, характеризующимися матрицами податливости. Балки обладают распределенными инерционными свойствами – погонными массами и моментами инерции. Балки могут также нести сосредоточенные грузы, такие, как двигатели, шасси, подвесные баки, контейнеры. Грузы обычно имеют выносы относительно оси балки и крепятся к ней либо жестко, либо упруго.

На рис. 10 показаны упругие перемещения в сечении $z = z'$ несущей поверхности ЛА, которую можно представить в виде балки.

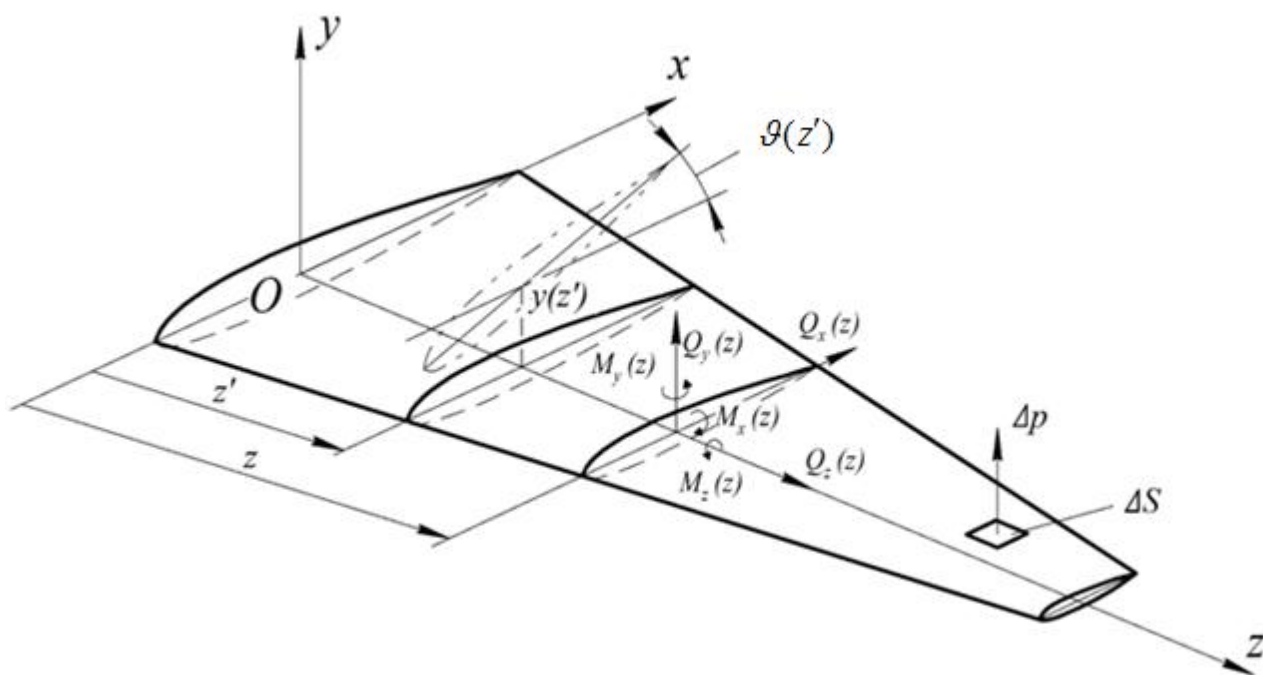


Рис. 10. Упругие перемещения и внутренние силовые факторы в сечениях несущей поверхности

Из-за часто расположенных нервюр поперечные сечения поверхности почти не деформируются, поэтому достаточно в сечении $z = z'$ задать только вертикальное перемещение $y(z')$ и угол поворота $\vartheta(z')$. Оси координат x и y направлены вдоль главных центральных осей сечения, а ось z совпадает с продольной осью балки, проходящей через ось жесткости. Упругими перемещениями вдоль оси x обычно пренебрегают. Угол поворота сечения положителен при вращении сечения против часовой стрелки, если смотреть с положительного направления оси z .

Для решения задачи о колебаниях балочной конструкции линейные $y(z,t)$ и угловые $\mathcal{G}(z,t)$ перемещения раскладывают по формам собственных изгибных $f_i(z)$ и крутильных $\varphi_j(z)$ колебаний ($i = 1, \dots, N_1$; $j = 1, \dots, N_2$).

Перемещение рассматриваемого сечения несущей поверхности описывают в виде произведения форм на обобщенные координаты $q(t)$, зависящие только от времени:

$$y(z,t) = \sum_{i=1}^{N_1} f_i(z)q_i(t); \quad \mathcal{G}(z,t) = \sum_{j=1}^{N_2} \varphi_j(z)q_j(t), \quad (1)$$

где N_1 и N_2 – число удерживаемых тонов собственных изгибных и крутильных колебаний (в общем случае в N_1 и N_2 входят и тона колебаний ЛА как твердого тела).

Для аппаратов с крылом малого и умеренного удлинений применяют *пластинчато-балочную схематизацию*, когда крыло и оперение представляют в виде набора панелей, пластин и балок. Фюзеляж, как правило, изображают одной или несколькими балками (см. рис. 8, а), а стыки отдельных агрегатов между собой схематизируют распределенными или сосредоточенными пружинами. Такая схема позволяет учитывать деформацию агрегатов (крыла, оперения) по потоку и тем самым более точно представлять аэродинамические нагрузки от переменных по хорде углов атаки.

В качестве исходной системы функций $w(x, z, t)$, описывающих деформации агрегата (упругой поверхности), используют полиномы, поэтому метод схематизации деформаций называют *методом полиномов*:

$$w(x, z, t) = \sum_{i=1}^N f_i(x, z) q_i(t), \quad (2)$$

где $f_i(x, z) = x^{p_i} z^{r_i}$ – полиномы по аргументам x, y ;

p_i, r_i – показатели степеней, выбираемые из натурального ряда чисел в соответствии с особенностями задачи и возможностями компьютера;

$q_i(t)$ – обобщенные координаты;

N – априорно задаваемое число полиномов.

Последовательное развитие *метода конечных элементов* (МКЭ) позволяет применять его в задачах аэроупругости (см. рис. 9). Согласно этому методу конструкцию самолета или вертолета представляют в виде большого числа простых элементов (число типов элементов измеряется десятками, а весь ЛА – десятками, а часто сотнями тысяч элементов). При этом достигается высокая точность воспроизведения конструкции, однако требуются задание больших объемов исходных данных и работа с громоздкими массивами чисел.

Определение поверхностных аэродинамических сил, действующих на ЛА, – сложная задача. Необходимо учитывать не только пространственное возмущенное движение аппарата как жесткого тела, но и его деформирование. Аэродинамические силы от внешних воздействий с учетом деформирования и колебаний часто вычисляют по гипотезе квазистационарности, а также на основе более сложной и трудоемкой нестационарной аэродинамики. В первом случае считают, что силы зависят только от распределения по поверхности ЛА местных углов атаки и не зависят от предыстории движения. Нередко обтекание ЛА сопровождается отрывными течениями. Тогда распределенные аэродинамические силы определяют на основе нелинейной нестационарной аэродинамики.

Любая масса ЛА под действием результирующей силы движется с некоторым ускорением \vec{a} , при этом выполняется второй закон Ньютона

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

По третьему закону Ньютона масса из-за своей инертности действует на ускоряющее тело с такой же силой по величине, но противоположно направленной:

$$F_{ин} = -\vec{F} = -m\vec{a},$$

которая называется силой инерции. Динамические явления аэроупругости следует изучать с учетом действия на упругую конструкцию сил и моментов сил инерции.

На рис. 11 показана точечная масса m , закрепленная на невесомой балке. Пусть масса испытывает ускорение вследствие действия на нее силы упругости $F_{упр}$ деформированной балки. Масса действует на балку с силой, равной $(-m\vec{a})$. Эта сила инерции и деформирует балку.

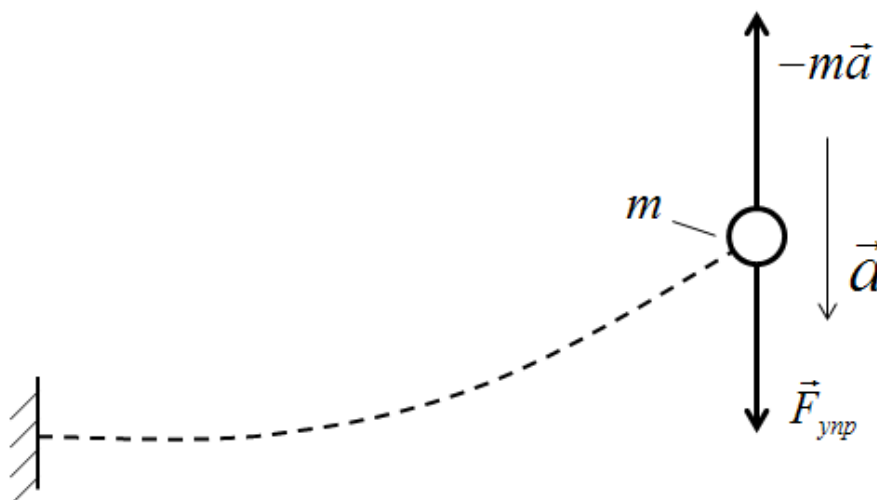


Рис. 11. Действие силы инерции на конструкцию

Действие переменных внешних нагрузок в сочетании с большими инерционными силами, вызванными колебаниями конструкции, приводит к необходимости решения проблем не только статической прочности, но и усталости конструкции. Под усталостью конструкции понимают изменение прочностных характеристик (потеря прочности), возникающее под действием переменных нагрузок. Это связано с постепенным накоплением необратимых повреждений, приводящих к образованию и развитию трещин и разрушению конструкции. Сопrotивление усталости – свойство конструкции противостоять возникновению и развитию усталостных повреждений.

Основная задача этого направления авиационной прочности – обеспечение необходимого ресурса самолета, т. е. продолжительности эксплуатации самолета, выражаемой в часах полета, числе полетов или других единицах.

В Авиационных правилах в отношении колебаний ЛА содержатся общие требования по вибрациям: на всех частях аппарата на каждом режиме должна отсутствовать чрезмерная вибрация. Планер самолета, взаимодействуя с окружающей средой, может совершать упругие колебания разных видов.

Особенности движения и нагружения ЛА при его колебаниях:

- действие переменных аэродинамических и инерционных сил;
- зависимость аэродинамических сил от перемещений и всего процесса деформирования конструкции;
- действие различных сил трения;
- аэроупругая динамическая неустойчивость конструкции при неблагоприятном соотношении параметров конструкции.

В зависимости от вида деформации упругих элементов конструкций различают *продольные, поперечные и крутильные* колебания.

При *продольных* колебаниях перемещения всех точек упругого стержня направлены вдоль оси стержня. При этом наблюдаются деформации удлинения или укорочения стержня, т. е. колебания растяжения-сжатия.

Поперечными называют колебания изгиба, при которых прогибы направлены перпендикулярно оси стержня. Напряженное состояние при поперечных колебаниях будет таким же, как и при статическом изгибе балки. Поэтому поперечные колебания иначе можно назвать *изгибными*.

Крутильными называют колебания стержней, сопровождаемые переменной деформацией кручения.

Кроме перечисленных видов колебаний существуют колебания смешанного типа, когда одновременно возникают деформации изгиба и кручения – *изгибно-крутильные* колебания.

По физической сущности колебания разделяют на свободные, вынужденные, параметрические и самовозбуждающиеся. В практике эксплуатации самолетов важно определить вид колебаний, возникающих как в полете, так и на земле. В зависимости от этого нужно находить пути их предотвращения, так как колебания приводят к динамической нагрузке конструкции.

Собственными (свободными) называют колебания, возникающие в изолированной системе вследствие внешнего возбуждения, вызывающего начальное отклонение точек системы от положения равновесия или начальные скорости. *Собственные* колебания продолжаются благодаря наличию внутренних упругих сил, восстанавливающих равновесие.

Собственные колебания продолжаются до тех пор, пока сообщенная в начале колебательного процесса энергия не будет полностью израсходована на работу против сил трения о воздух и сил внутреннего трения в металле.

При собственных колебаниях характер колебательного процесса в основном определяется только внутренними силами системы, зависящими от ее физического строения. Период колебаний (время одного полного колебания) или частота колебаний (величина, обратная периоду) зависит от самой системы. Частота колебаний является вполне определенной для системы и называется *собственной частотой колебаний* системы. Свободные колебания из-за потерь энергии в системе практически всегда затухающие.

Вынужденными называются колебания упругой системы, происходящие в результате действия на систему (в течение всего процесса колебаний) заданных внешних периодически изменяющихся возмущающих сил. Характер колебательного процесса зависит от свойств системы и внешней силы. Колебания, вызванные беспокойной атмосферой, – вынужденные.

Вынужденные колебания не затухают. Колебательный процесс происходит с частотой возмущающей силы и поддерживается из-за непрерывного поступления энергии извне. При совпадении частоты возмущающих сил с частотой собственных колебаний системы наступает *резонанс*, характеризующийся резким возрастанием амплитуды вынужденных колебаний и сопровождающийся возникновением в конструкции недопустимых деформаций.

В пособии приведены домашние задания с необходимыми теоретическими замечаниями и методическими указаниями. Наибольшее внимание уделено собственным и вынужденным колебаниям систем с одной и двумя степенями свободы. Анализ свободных колебаний позволяет найти их частоты и формы, являющиеся важнейшими динамическими характеристиками

конструкции. Зная эти характеристики, можно получить решение задачи о вынужденных колебаниях конструкции (ее динамической реакции) на внешнее возмущение.

В работе определена динамическая реакция для системы с двумя степенями свободы, показано, что нагруженность конструкции следует изучать на основе моделирования нестационарного движения и колебаний конструкции.

Задание 1

Определение частоты собственных колебаний механической системы с одной степенью свободы

Частота собственных колебаний конструкции – важный параметр, позволяющий избежать резонанса, т. е. совпадения частоты внешнего воздействия с собственной частотой колебаний, абсолютно недопустимого явления в процессе эксплуатации ЛА. При близости частоты собственных колебаний системы и частоты внешнего воздействия в конструкции возбуждаются повышенные вибрации, появляются большие силы инерции и очень быстро расходуется ресурс конструкции. Инженер должен знать основные параметры и факторы, определяющие величину частоты собственных колебаний системы.

Рассмотрим механические системы, имеющие только одну степень свободы и совершающие свободные колебания. Возмущающие силы при свободных колебаниях отсутствуют. Если силы трения не учитываются, то системы называются консервативными, они изолированы от окружающей среды и запас энергии в них постоянный.

Реальные конструкции всегда неконсервативные, часть энергии в них преобразуется в теплоту, т. е. происходит рассеивание энергии при колебаниях.

Цель задания – определить частоту собственных колебаний конструкции при отсутствии сил трения.

Для этого необходимо:

- установить обобщенную координату, задающую положение механической системы;
- исследовать устойчивость механической системы в положении равновесия;
- определить вид движения (поступательное или вращательное) элемента системы, имеющего массу;
- установить силы, действующие на систему, и закон их изменения как функции обобщенной координаты;

- записать уравнения движения механической системы;
- найти частоту собственных колебаний и проанализировать влияние на нее основных конструктивных параметров системы.

Методика выполнения

На практике колебательные системы состоят из бесчисленного числа материальных точек и имеют бесконечное число степеней свободы. Для упрощения расчетов проводят схематизацию, т. е. реальную систему заменяют расчетной моделью – системой с одной, двумя или несколькими степенями свободы.

В предлагаемых далее вариантах заданий (см. табл. 1) приведены системы с одной степенью свободы, которые имеют только одну собственную частоту. Необходимо определить, какое движение совершает массивное тело системы относительно устойчивого положения равновесия (поступательное или вращательное), и установить обобщенную координату q системы. В качестве обобщенной координаты следует выбрать линейное перемещение x или угол поворота φ (рис. 12).

Рассмотрим малые колебания системы. Считается, что материал конструкции находится в линейно-упругой области, поэтому справедлив принцип независимости действия сил.

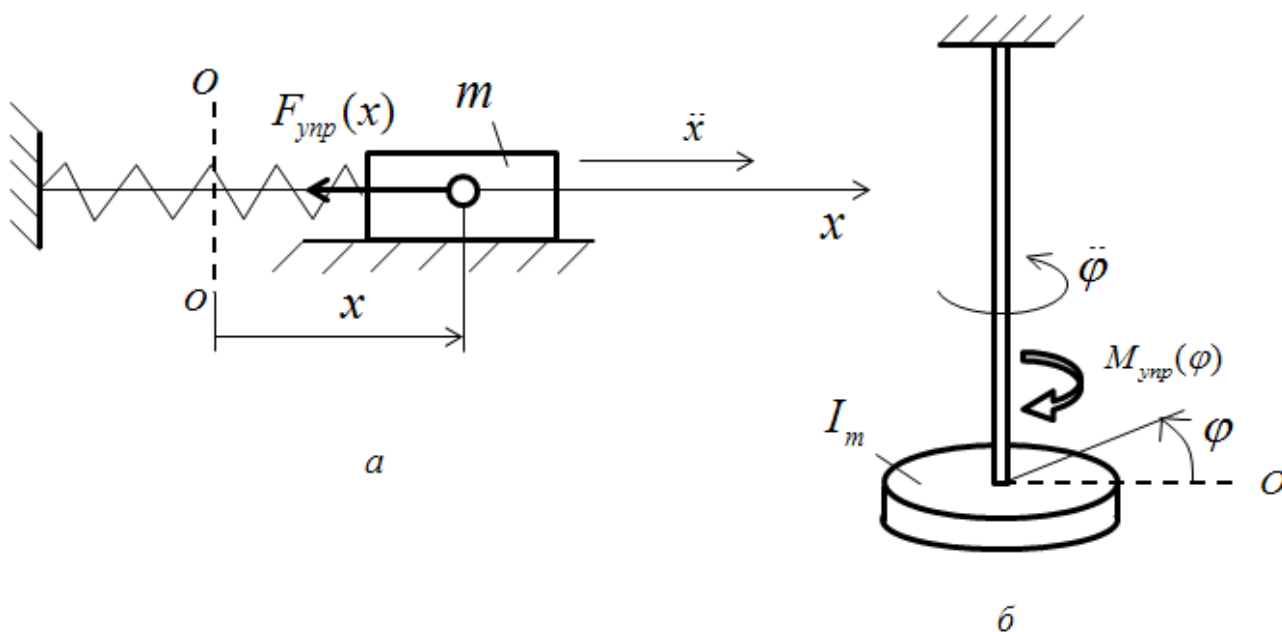


Рис. 12. Поступательное или вращательное движение массы

Очень важно найти положение равновесия заданной механической системы и исследовать ее устойчивость в этом положении. Колебания

происходят относительно устойчивого положения равновесия. Согласно теореме Лагранжа–Дирихле достаточным условием устойчивости положения равновесия консервативной системы есть минимум потенциальной энергии в этом положении.

Устойчивость положения равновесия

На примере массы, подвешенной на пружине жесткостью C (рис. 13), найдем положение равновесия заданной механической системы и исследуем устойчивость положения равновесия.

Пусть точка O_1 соответствует положению нерастянутой пружины. Отсчитываем от этой точки перемещение груза. Очевидно, что в положении равновесия груза (положение $O-O$) сила упругости пружины уравнивает силу тяжести

$$F_{\text{упр}} = G \quad (3)$$

и положение равновесия груза характеризуется координатой $\delta_{\text{см}}$.

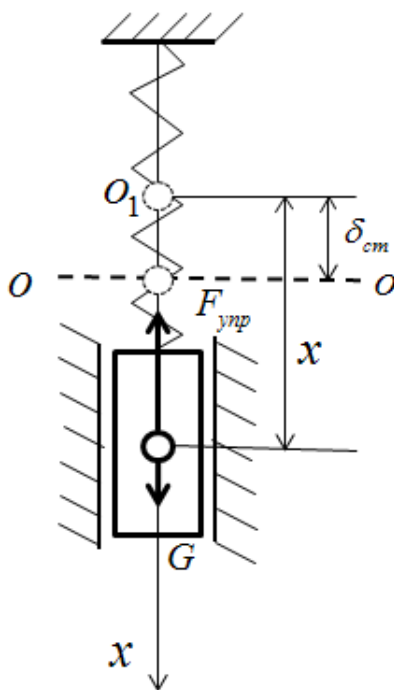


Рис. 13. Колебания подвешенного груза

Как известно, сила упругости пружины изменяется по линейному закону при изменении ее удлинения: чем больше сила, тем больше перемещение груза. Закон изменения силы упругости в зависимости от ее деформации показан на рис. 14.

Если груз отклонится на величину x , то сила, необходимая для создания в пружине удлинения x ,

$$F_{\text{уп}}(x) = Cx, \quad (4)$$

где коэффициент пропорциональности C – жесткость пружины, размерность пружины – Н/м.

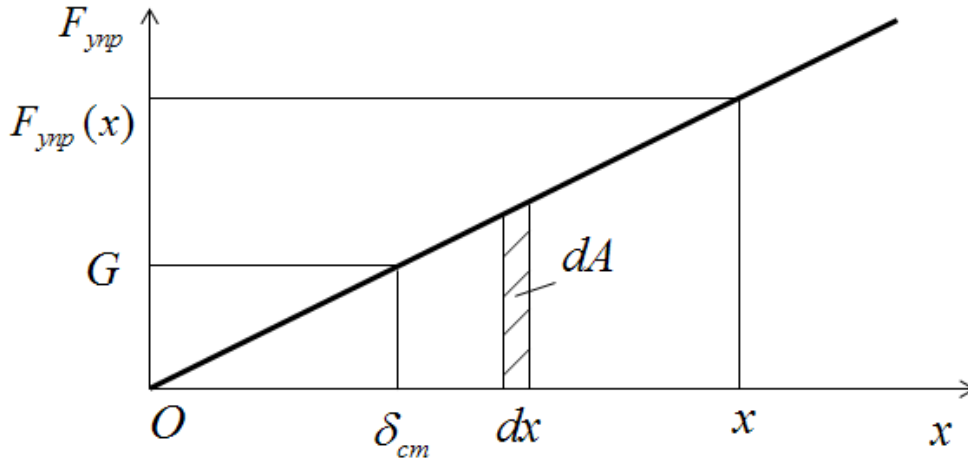


Рис. 14. Изменение силы упругости пружины при ее деформации (удлинении)

Как следует из соотношений (3) и (4), статическое удлинение пружины

$$\delta_{\text{ст}} = G/C. \quad (5)$$

Пусть груз из-за возмущения отклонился на $x > \delta_{\text{ст}}$. На груз действуют сила тяжести и сила упругости

$$F_{\text{уп}} = G + C(x - \delta_{\text{ст}}) = Cx. \quad (6)$$

Покажем, что положение равновесия груза устойчивое. Для этого подсчитаем работу сил тяжести и упругости по возвращению груза в положение O_1 .

Работа силы тяжести отрицательна, так как направления силы и перемещения не совпадают:

$$A(G) = -mgx. \quad (7)$$

Работа силы упругости – это площадь треугольника (см. рис. 14), состоящего из элементарных работ dA :

$$A(F_{\text{уп}}) = \sum dA = \frac{Cx^2}{2}. \quad (8)$$

Работа силы упругости положительна, так как направление силы и перемещения массы совпадают.

Известно, что потенциальная энергия системы – это работа, которую могут совершить силы по возвращении тела из данного положение в исходное. За исходное положение примем положение, соответствующее точке O_1 . В нем

потенциальную энергию будем считать равной нулю. Поэтому потенциальная энергия системы (груза и пружины)

$$\Pi(x) = A(G) + A(F_{\text{упр}}) = -mgx + \frac{Cx^2}{2}. \quad (9)$$

Зависимость $\Pi(x)$ показана на рис. 15. Отметим, что в положении равновесия системы потенциальная энергия принимает минимальное значение. Это имеет фундаментальное значение и называется принципом минимума потенциальной энергии системы в положении устойчивого равновесия.

Груз после возмущения совершает движения около исходного положения равновесия. Из-за действия сил трения, всегда присутствующих в реальности, груз возвращается в положение равновесия.

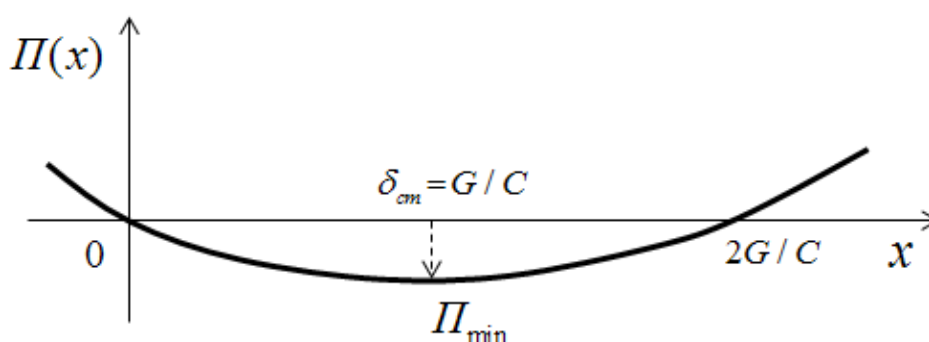


Рис. 15. Изменение потенциальной энергии системы

Координату x всегда отсчитывают от положения устойчивого равновесия системы.

Свободные колебания

Наиболее простой пример колебательного движения – это прямолинейное движение материальной точки при действии на нее восстанавливающей силы, пропорциональной отклонению точки от положения равновесия (рис. 16).

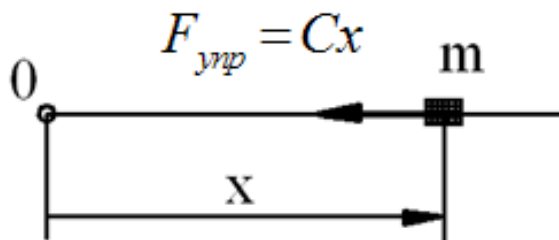


Рис. 16. Действие на точку восстанавливающей силы

Физическая природа восстанавливающей силы может быть различной, например, реакция невесомой упругой связи. Тогда коэффициент

пропорциональности C характеризует жесткость этой связи, т. е. он равен силе, которую нужно приложить к связи для того, чтобы получить перемещение материальной точки, равное единице.

Установим характер движения груза для системы, показанной на рис. 17. Здесь положение равновесия соответствует недеформированной пружине. Единственная сила, действующая на груз вдоль оси x , – это сила упругости. Именно она вызывает ускорение массы a_x .

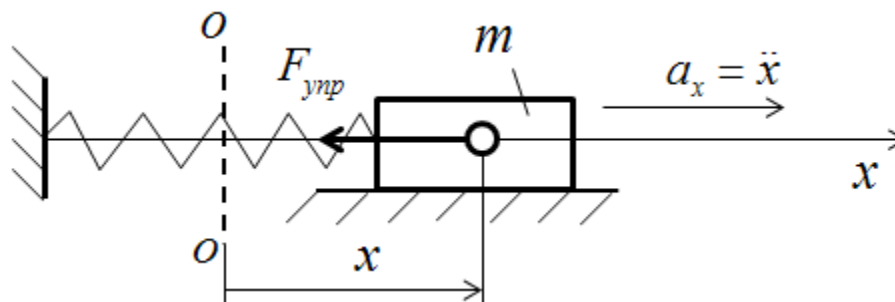


Рис. 17. Движение механической системы

В отклоненном положении на груз действует сила упругости, зависящая от величины смещения груза. Запишем второй закон Ньютона в векторной форме

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}. \quad (10)$$

Ускорение вдоль оси x – это производная от скорости или вторая производная от координаты

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}. \quad (11)$$

В проекции на ось x уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} = -F_{упр}(x) = -Cx \quad (12)$$

или

$$\ddot{x} = -\frac{C}{m}x. \quad (13)$$

Отсюда видно, что при положительной координате x (смещении вправо от точки O) ускорение отрицательное и направлено противоположно оси x в сторону действующей силы.

Введем обозначение

$$\omega_c^2 = C/m, \quad (14)$$

тогда

$$\ddot{x} = -\omega_c^2 x \quad (15)$$

или

$$\ddot{x} + \omega_c^2 x = 0. \quad (16)$$

Известна функция $x(t)$, вторая производная которой равна самой функции. Это функция $\sin(t)$. Поэтому закон движения массы примем

$$x(t) = \sin(\omega_c t), \quad (17)$$

тогда ускорение массы

$$\ddot{x}(t) = -\omega_c^2 \sin(\omega_c t).$$

Следовательно, выполняется соотношение (16) и справедлив принятый закон движения.

Из выражения (17) можно сделать вывод о том, что ω_c – круговая частота собственных колебаний.

Воспользуемся далее теорией дифференциальных уравнений. Общее решение дифференциального уравнения движения материальной точки (16) представим так :

$$x = C_1 \cos \omega_c t + C_2 \sin \omega_c t. \quad (17)$$

Постоянные C_1 и C_2 зависят от начальных условий, т. е. от начального положения материальной точки и ее начальной скорости. Их определяют координатой x и значением производной \dot{x} в момент времени $t_0 = 0$:

$$x_0 = x(0); \quad V_0 = \dot{x}(0). \quad (18)$$

Тогда

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{V_0}{\omega_c}. \quad (19)$$

Запишем общее решение уравнения (17) с учетом (19):

$$x = x_0 \cos \omega_c t + \frac{V_0}{\omega_c} \sin \omega_c t = A \sin(\omega_c t + \varphi_0). \quad (20)$$

Полученное решение имеет следующую геометрическую интерпретацию. Рассмотрим равномерное вращательное движение системы двух взаимно перпендикулярных жестко связанных друг с другом векторов C_1 и C_2 (рис. 18).

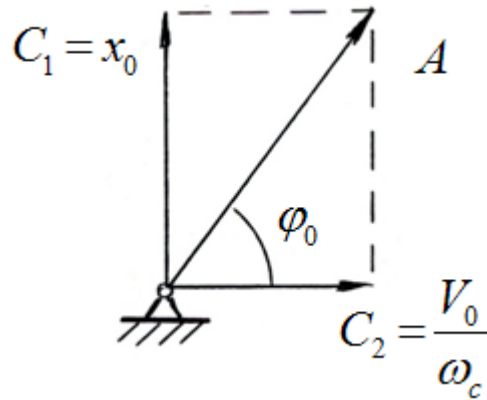


Рис. 18. Геометрическая интерпретация решения

Сумма векторов C_1 и C_2 представлена вектором

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{V_0^2}{\omega_c^2}}. \quad (21)$$

Начальное положение вектора A определяется углом

$$\varphi_0 = \arctg \frac{x_0 \omega_c}{V_0}. \quad (22)$$

На рис. 19 показано положение системы в текущий момент t . При равномерном вращении системы с угловой скоростью, равной ω_c , угол поворота вектора A

$$\varphi = \omega_c t. \quad (23)$$

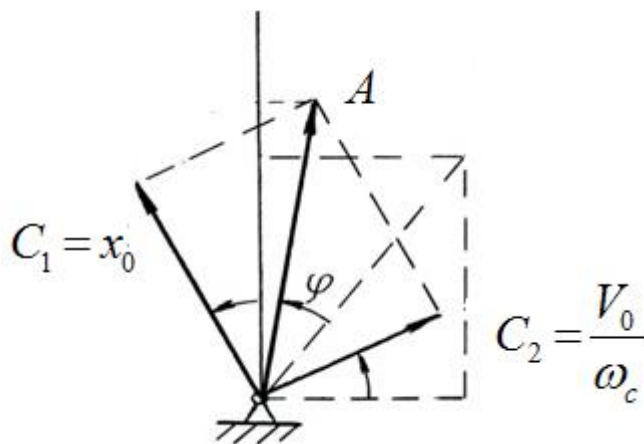


Рис. 19. Вращательное движение векторов C_1 и C_2

Проекция вектора A на вертикальную ось x равна сумме проекций на ось его составляющих:

$$A_x = C_{1x} + C_{2x} = C_1 \cos \omega_c t + C_2 \sin \omega_c t. \quad (24)$$

В то же время проекция вектора A на ось x

$$A_x = A \sin(\omega_c t + \varphi_0). \quad (25)$$

В некоторых случаях колебательное движение лучше анализировать с помощью уравнения (25).

Коэффициент A равен наибольшему значению координаты x , т. е. наибольшему отклонению материальной точки от положения равновесия. Это и есть амплитуда колебаний.

Амплитуда колебаний зависит от начальных условий (x_0, V_0) и параметра ω_c^2 , а значит, от жесткости упругой связи C и инертности колеблющейся точки.

Аргумент $(\omega_c t + \varphi_0)$ называется фазой колебаний, а φ_0 – начальной фазой.

Время одного оборота вектора A – это период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_c}, \quad (26)$$

равный промежутку времени, по истечении которого движение точки полностью повторяется. Величина, обратная периоду колебаний, называется частотой колебаний:

$$f = \frac{1}{T} \quad (27)$$

(измеряется в герцах – числом колебаний за одну секунду).

Параметр ω_c , равный угловой скорости вращения системы векторов, изображенных на рис. 19, называется круговой (циклической) частотой, измеряемой числом радиан в секунду и равной числу колебаний за 2π секунд:

$$\omega_c = \sqrt{\frac{C}{m}}. \quad (28)$$

Круговая частота зависит от жесткости пружины и массы груза и не зависит от начальных возмущений. Чем больше жесткость и меньше масса, тем больше частота (размерность частоты – $рад/с$).

Круговая частота называется собственной, так как на систему не действуют внешние силы.

Закон движения диска при вращательном движении массы (см. рис. 12) имеет вид, аналогичный формуле (16). При повороте диска на угол φ появляется момент сил упругости

$$M_{упр}(\varphi) = C\varphi,$$

где C – крутильная жесткость упругой связи, Нм.

Уравнение движения при свободных колебаниях

$$I\ddot{\varphi} = -M_{\text{упр}}(\varphi), \quad (29)$$

где I – момент инерции движущегося тела. Из выражения (29) получаем дифференциальное уравнение свободных крутильных колебаний

$$\ddot{\varphi} + \omega_c^2 \varphi = 0. \quad (30)$$

Уравнение движения (16) можно определить другим способом. Воспользуемся принципом Даламбера и приложим силу инерции

$$F_{\text{ин}}(t) = -m\ddot{x}$$

к упругой связи (рис. 20). Отметим, что приложенная к пружине сила инерции – это реально действующая на пружину сила.

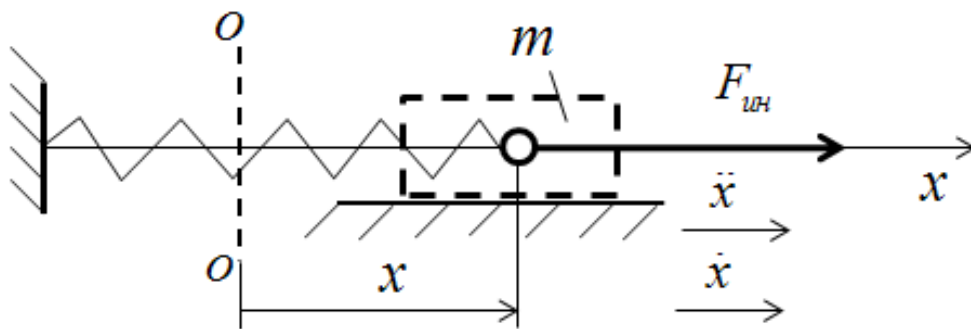


Рис. 20. Деформация упругой связи

Упругое перемещение пружины при нагружении силой инерции

$$x = \delta_{11} F_{\text{ин}}. \quad (31)$$

Здесь δ_{11} – отклонение материальной точки от положения равновесия под действием силы, равной единице. Упругое перемещение реализуется мгновенно, так как пружина не имеет массы.

Тогда

$$x = \delta_{11} (-m\ddot{x}) \quad (32)$$

или

$$\ddot{x} + \frac{1}{\delta_{11} m} x = 0. \quad (33)$$

Уравнение (33) совпадает с (16), так как жесткость C и единичное перемещение связаны соотношением

$$C = \frac{1}{\delta_{11}}. \quad (34)$$

Такой подход к составлению уравнений колебаний во многих случаях более удобный, нежели при использовании жесткости упругой связи.

Наиболее универсальный способ составления уравнений движения механической системы – применение уравнений Лагранжа II рода:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dT}{dq_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad (35)$$

где T – кинетическая энергия механической системы;

q_j, \dot{q}_j – обобщенные координаты и скорости;

j – количество степеней свободы;

Q_j – обобщенная сила, соответствующая изменению δq_j .

Для системы с одной степенью свободы ($j=1$) требуется только одно уравнение. При использовании уравнений Лагранжа II рода необходимо составить выражение для кинетической энергии системы, которое зависит от обобщенных координат и скоростей. Если действующие силы потенциальные, то обобщенную силу можно определять через потенциальную энергию системы :

$$Q = - \frac{\partial \Pi}{\partial q}. \quad (36)$$

Уравнения движения системы целесообразно записывать с помощью общего уравнения динамики. К системе кроме внешних и внутренних сил в соответствии с принципом Даламбера следует приложить силы инерции и рассмотреть условие равновесия системы на основе принципа возможных перемещений. Сумма виртуальных (возможных) работ всех действующих сил, включая силы инерции, на возможном перемещении системы должна равняться нулю:

$$\sum \delta A(F) = 0. \quad (37)$$

Внешние силы, приложенные к системе, как правило, – потенциальные. Поэтому можно воспользоваться законом сохранения полной механической энергии в процессе колебаний:

$$T + \Pi = const, \quad (38)$$

где T и Π – кинетическая и потенциальная энергии в произвольный момент времени.

Анализ решения уравнения свободных колебаний показывает следующее:

– свободные колебания – гармонические, происходят относительно положения устойчивого равновесия;

– параметр ω_c в уравнении (16) – это круговая частота собственных колебаний, которая зависит от жесткостных и массовых характеристик системы и не зависит от начальных условий;

– амплитуду A и фазу φ_0 определяют начальными условиями.

Затухающие колебания

При колебаниях реальной конструкции всегда существуют силы, препятствующие движению, что приводит к постепенному уменьшению амплитуды и затуханию колебаний. Изменяется и частота собственных колебаний.

К силам, препятствующим движению, относятся силы трения в кинематических парах, силы сопротивления воздуха или вязкой среды, а также внутренние силы неупругого сопротивления.

По гипотезе Фойгта для учета внутренних сил сопротивления движению нужно материал колеблющейся механической системы рассматривать как упруговязкий. Напряжения в нем зависят не только от относительной деформации ε , но и от скорости изменений деформации:

$$\sigma = \varepsilon E + \chi E \dot{\varepsilon} / t, \quad (39)$$

где χ – коэффициент вязкого трения. По гипотезе Фойгта силы внутреннего сопротивления приводят к внешней силе трения, пропорциональной скорости движения:

$$F_{mp} = -\alpha \frac{dx}{dt} \quad (40)$$

(α – коэффициент трения).

С учетом силы F_{mp} уравнение (31) принимает вид

$$x = \delta_{11} (F_{ин} + F_{mp}) = \delta_{11} (-m\ddot{x} - \alpha\dot{x}).$$

Преобразуем его к виду

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega_c^2 x = 0, \quad (41)$$

где $n = \frac{\alpha}{2m}$ – параметр, характеризующий интенсивность уменьшения амплитуды колебаний, называется коэффициентом вязкого демпфирования;

$\omega_c^2 = 1/\delta_{11}m = C/m$ – квадрат циклической частоты свободных колебаний при отсутствии сил сопротивления.

Общее решение уравнения (41) в случае малого трения ($n^2 < \omega_c^2$) представим так:

$$x(t) = e^{-nt} (C_1 \cos \omega_{c0}t + C_2 \sin \omega_{c0}t), \quad (42)$$

или

$$x(t) = e^{-nt} A \sin(\omega_{c\delta} t + \varepsilon), \quad (43)$$

где $\omega_{c\delta}$ – частота затухающих свободных колебаний (демпфированная собственная частота):

$$\omega_{c\delta} = \sqrt{\omega_c^2 - n^2}. \quad (44)$$

Закон движения (43) устанавливает затухающие свободные колебания.

При $n \geq \omega_c$ (случай большего сопротивления) наблюдается апериодическое затухающее движение.

При $n < \omega_c$ движение носит колебательный характер, хотя и не является периодическим.

Из выражения (43) видно, что за промежуток времени, равный π / ω_1 , система проходит через состояние равновесия. Этим объясняется колебательный характер движения.

Величина, равная

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_{c\delta}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_c^2 - n^2}}, \quad (45)$$

условно называется периодом затухающих колебаний.

Из формулы (45) видно, что период затухающих колебаний больше, чем период свободных колебаний системы при отсутствии сопротивления движению.

При малом трении можно приближенно считать, что

$$\omega_{c\delta} = \omega_c \sqrt{1 - n^2 / \omega_c^2} \approx \omega_c, \quad T_1 \approx T.$$

Множитель Ae^{-nt} показывает, что последовательные максимальные отклонения системы от положения равновесия с течением времени уменьшаются. При этом отношение

$$\frac{x(t)}{x(t+T_1)} = \frac{e^{-nt} A \sin(\omega_1 t + \varepsilon)}{e^{-n(t+T_1)} A \sin(\omega_1 t + \omega_1 T_1 + \varepsilon)} = e^{nT_1}$$

не зависит от времени t .

Величина

$$\delta = \ln \frac{x(t)}{x(t+T_1)} = nT_1 \approx nT = n \frac{2\pi}{\omega_c} \quad (46)$$

называется логарифмическим декрементом затуханий и характеризует быстроту затухания колебаний.

При выполнении задания силы трения в системе не учитывают. Кроме того, полученные уравнения движения необходимо упростить. Так как

рассматривают только малые отклонения системы от положения равновесия, то уравнения движения линеаризуют.

Если в системе присутствуют цилиндрические пружины, то их жесткость можно вычислить по формуле

$$C = \frac{Gr^4}{4R^3n}, \quad (47)$$

где G – модуль сдвига;

n – количество витков;

r – радиус проволоки.

Жесткость цилиндрической пружины находим для случая, когда шаг витков по сравнению с радиусом R пружины малый $h \ll 2R$ (угол наклона витков малый). Напомним, что деформация пружины в основном определяется скручиванием витков пружины от действия крутящего момента в ее сечениях.

Примеры выполнения задания 1

Задача 1

На конце жесткого стержня длиной l (рис. 21) прикреплена точечная масса M . Пружины жесткостью C горизонтальны и прикреплены к середине стержня. Определить частоту собственных колебаний механической системы.

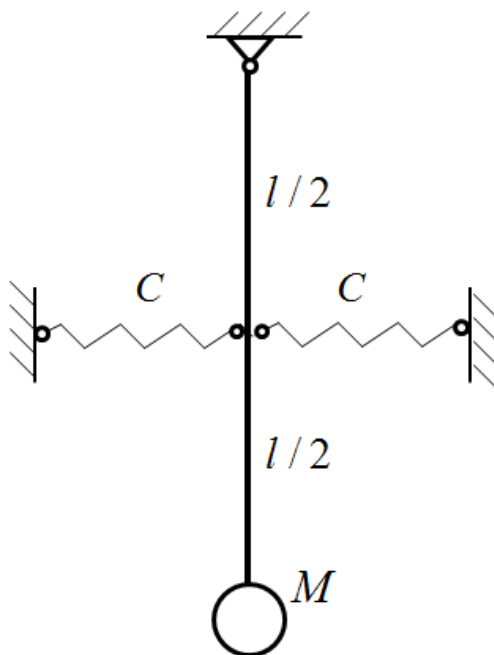


Рис. 21. Механическая система в положении равновесия

Решение

Вертикальное положение стержня – это устойчивое положение равновесия системы. В этом положении полная потенциальная энергия

принимает минимальное значение. Малое начальное возмущение вызывает устойчивое движение системы относительно положения равновесия.

Очевидно, что система имеет одну степень свободы. Примем за обобщенную координату угол отклонения φ стержня от вертикали.

Получим уравнение возмущенного движения системы с помощью различных способов.

На рис. 22 показана система в отклоненном положении и силы, действующие на стержень со стороны пружин.

Первый способ. Наиболее общий прием решения – использование уравнения Лагранжа II рода. Для обобщенной координаты φ справедливо уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q,$$

где T – кинетическая энергия системы;

Q – обобщенная сила, связанная с действием сил тяжести и упругости.

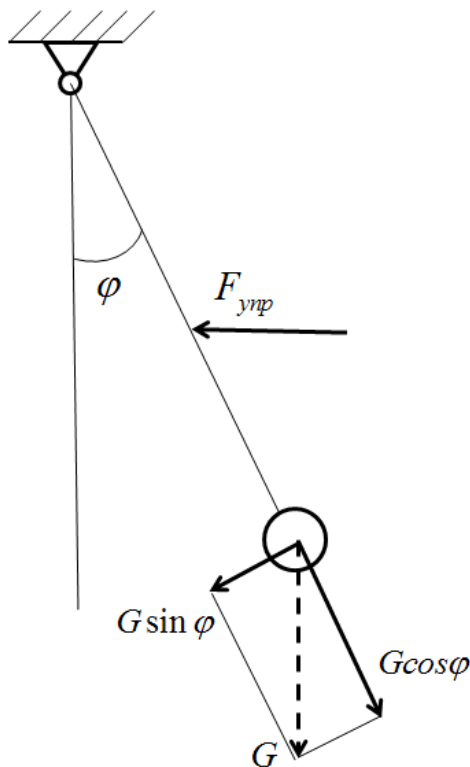


Рис. 22. Силы, действующие на систему

Для произвольного положения системы кинетическая энергия

$$T = \frac{Ml^2 \dot{\varphi}^2}{2}.$$

Сила тяжести и внутренние силы упругости – потенциальные, поэтому потенциальная энергия системы состоит из двух частей – потенциальной энергии деформации двух пружин

$$U_1 = \frac{C\varphi^2 l^2}{4}$$

и потенциала силы тяжести U_2 , равного произведению веса Mg на высоту подъема его центра тяжести $l(1 - \cos \varphi)$:

$$U = U_1 + U_2 = \frac{C\varphi^2 l^2}{4} + Mgl(1 - \cos \varphi).$$

Обобщенную силу находят как частную производную от потенциальной энергии со знаком минус:

$$Q = -\frac{\partial U}{\partial \varphi} = \frac{Cl^2}{2} \varphi + Mgl \sin \varphi.$$

Дифференцируя соотношение для кинетической энергии системы

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = Ml^2 \ddot{\varphi}$$

и подставляя полученные выражения, а также обобщенную силу Q в уравнение Лагранжа, получаем нелинейное уравнение движения системы

$$Ml^2 \ddot{\varphi} + \frac{Cl^2}{2} \varphi + Mgl \sin \varphi = 0.$$

При малых углах $\sin \varphi \approx \varphi$, поэтому линейное дифференциальное уравнение движения примет вид

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{g}{l} + \frac{1}{2} \frac{C}{M} \right) \varphi = 0. \quad (48)$$

Частота собственных колебаний системы

$$\omega_c = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{1}{2} \frac{C}{M}}.$$

Второй способ. Запишем второй закон Ньютона для вращательного движения стержня с закрепленной массой вокруг точки O :

$$J_0 \ddot{\varphi} = \sum M_O(F), \quad (49)$$

где J_0 – массовый момент инерции системы относительно центра вращения

$$J_0 = Ml^2;$$

$\sum M_O(F)$ – сумма моментов, действующих на стержень сил:

$$\sum M_O(F) = -Mgl \sin \varphi - F_{\text{упр}} \frac{l}{2};$$

$F_{\text{упр}}$ – упругая сила двух пружин, равная с линейной точностью ($\sin \varphi \approx \varphi$)

$$F_{\text{упр}} = 2C \frac{l \sin \varphi}{2} \approx Cl\varphi.$$

Подставляя в выражение (49) полученные соотношения, приходим к уравнению движения системы в виде (48).

Третий способ. При использовании общего уравнения динамики и принципа возможных перемещений необходимо вначале приложить к системе

кроме заданных сил силы инерции (рис. 23). В результате система будет находиться в динамическом равновесии.

На систему действуют заданные силы и силы инерции. Заданные силы – это внешняя сила тяжести G , реакции опор и внутренние силы упругости в пружинах. Спроектируем силу инерции массы M в ее вращательном движении на касательную и нормаль к траектории массы.

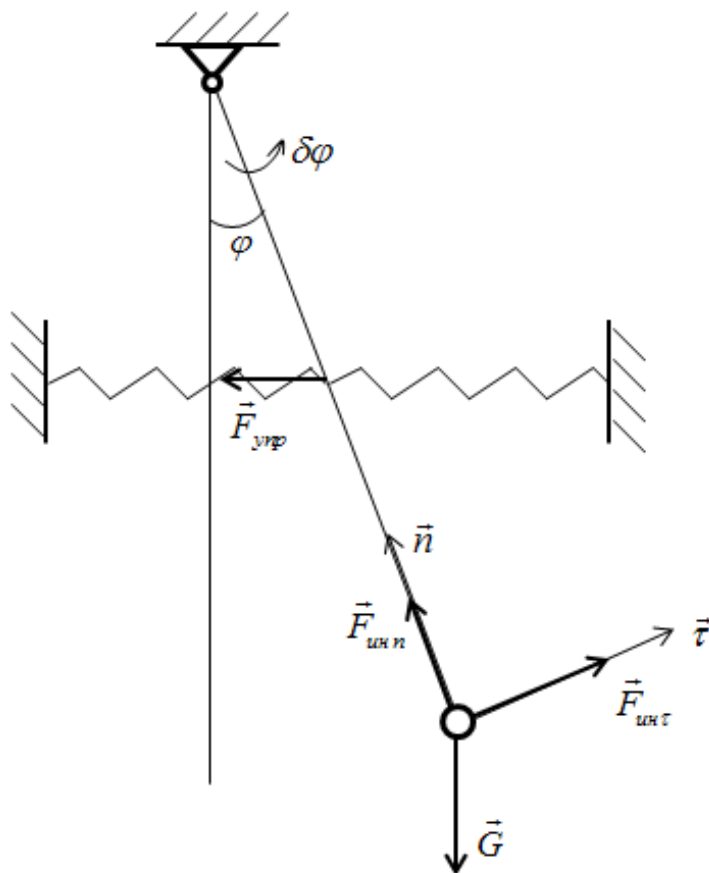


Рис. 23. Использование принципа Даламбера

На рис. 23 показано положительное направление возможного перемещения – поворот на малый угол $\delta\varphi$. Условие равновесия системы – равенство нулю суммы виртуальных работ всех действующих сил, включая силы инерции, на возможном перемещении $\delta\varphi$:

$$\sum \delta A(F) = 0.$$

Касательная и нормальная силы инерции, записанные в векторном виде:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{ин\tau} &= -M\ddot{\varphi}l\vec{\tau}, \\ \vec{F}_{инn} &= -M\frac{\dot{\varphi}^2}{l}\vec{n}, \end{aligned}$$

где $\vec{\tau}$ и \vec{n} – единичные орты.

Считаем, что связи в системе идеальные, поэтому их работа на виртуальном перемещении $\delta\varphi$ равна нулю. Необходимо определить работу заданной силы тяжести G , внутренних сил упругости, действующих в пружине, и сил инерции. Отметим, что составляющая $\vec{F}_{ин\tau}$ перпендикулярна возможному перемещению массы и поэтому работы не совершает.

Таким образом, условие равновесия системы – это равенство нулю суммы виртуальных работ силы тяжести

$$\delta A(\vec{G}) = -Mgl \sin \varphi \delta\varphi,$$

силы упругости двух пружин

$$\delta A(\vec{F}_{упр}) = -\frac{1}{2} Cl^2 \sin \varphi \delta\varphi$$

и тангенциальной составляющей силы инерции груза

$$\delta A(\vec{F}_{ин\tau}) = -M\ddot{\varphi} l^2 \delta\varphi$$

на возможном перемещении $\delta\varphi$:

$$-M\ddot{\varphi} l^2 \delta\varphi - Mgl \sin \varphi \delta\varphi - \frac{1}{2} Cl^2 \sin \varphi \delta\varphi = 0.$$

После сокращения выражения на произвольный множитель $\delta\varphi$ и деления на Ml^2 получим соотношение (48).

Четвертый способ. На систему действуют потенциальные внешняя сила тяжести и силы упругости пружины (работа их сил не зависит от траектории движения, а определяется только начальным и конечным положением). Поэтому воспользуемся теоремой о сохранении полной механической энергии системы. Запишем ее для двух положений стержня с массой – вертикального 1 и отклоненного на угол φ 2. Тогда

$$T_1 + \Pi_1 = T_2 + \Pi_2.$$

В положении 2 система останавливается, поэтому

$$T_2 = 0.$$

Примем, что в положении 1 полная потенциальная энергия равна нулю (потенциальную энергию определяют с точностью до постоянной):

$$\Pi_1 = 0,$$

следовательно, кинетическая энергия T_1 полностью переходит в потенциальную Π_2 :

$$T_1 = \Pi_2. \tag{50}$$

При гармонических колебаниях угол отклонения стержня изменяется по закону

$$\varphi = A \sin(\omega t + \varepsilon).$$

Таким образом, угловую скорость определяют так:

$$\dot{\varphi} = A\omega \cos(\omega t + \varepsilon).$$

Максимальная кинетическая энергия системы

$$T_1 = \frac{J_0\omega^2}{2} = \frac{J_0A\omega^2}{2},$$

а максимальная потенциальная –

$$P_2 = Mg(l - l \cos \varphi) + 2 \frac{C\lambda^2}{2},$$

где $\omega = \dot{\varphi}$ – угловая скорость, а $\lambda = \frac{\varphi l}{2}$ – удлинение пружины.

После подстановки соотношений для T_1 и P_2 в выражение (50) получим уравнение (48).

Выводы

1. Свободные колебания – гармонические и происходят относительно положения устойчивого равновесия.
2. Круговая частота собственных колебаний от жесткостных и массовых характеристик системы не зависит от начальных условий.

Задача 2

Груз массой m прикреплен к плоской раме (рис. 24).

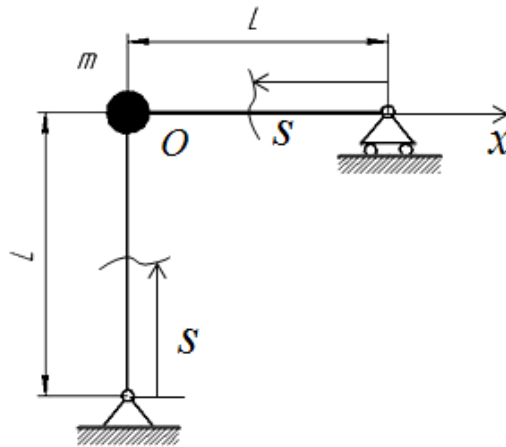


Рис. 24. Колебания плоской рамы

Определить частоту собственных колебаний груза в горизонтальном направлении, не учитывая массу рамы. Стержни имеют одинаковую изгибную жесткость EI .

Решение

С помощью соотношения (33) получим уравнения движения системы. Горизонтальные смещения массы происходят только вследствие деформации изгиба рамы. Определим силу упругости, действующую на массу при ее

смещении. Для этого приложим единичную силу к раме в месте закрепления массы. Сила действует в горизонтальном направлении (рис. 25).

Определим реакции опор от действия единичной силы из условия равновесия системы:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= H_A - P = 0; \\ \sum M_A(F) &= -R_B l + Pl = 0; \\ \sum F_y &= R_A - R_B = 0,\end{aligned}$$

откуда

$$H_A = 1; \quad R_B = 1; \quad R_A = 1.$$

Эпюры изгибающих моментов в раме показаны на рис. 25.

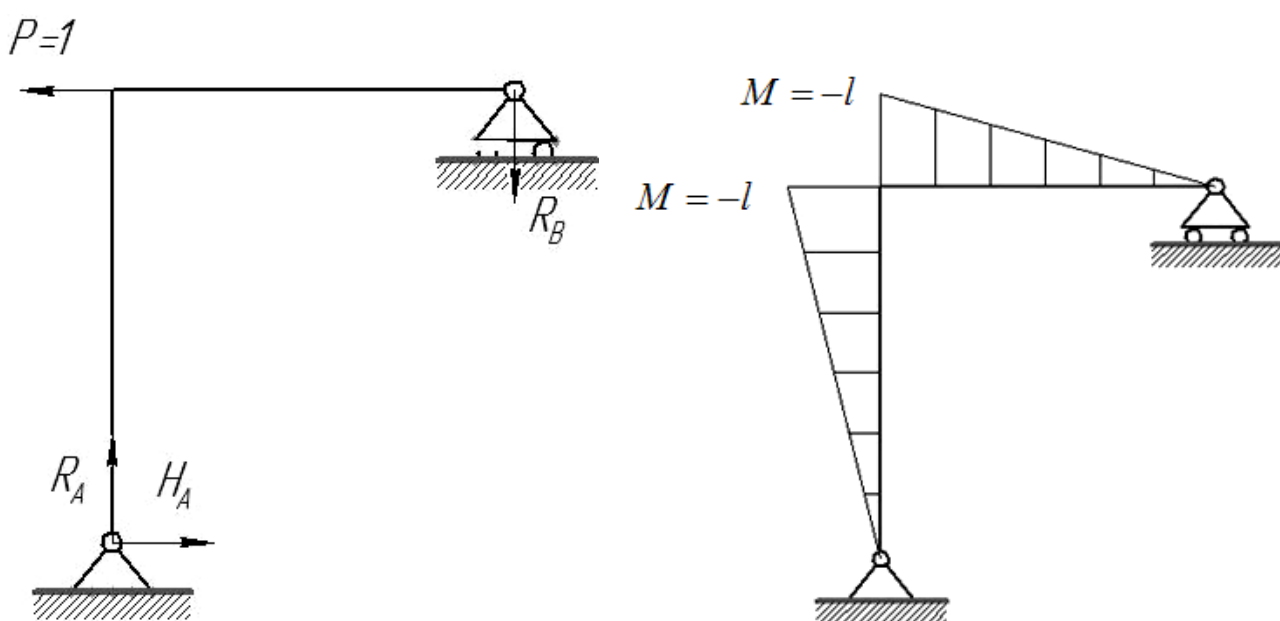


Рис. 25. Единичное состояние рамы и эпюры изгибающих моментов

Горизонтальное смещение точки приложения единичной силы согласно интегралу Мора

$$\delta_{11} = \sum \frac{1}{EI} \int_0^l M^2(s) ds.$$

Выражения изгибающих моментов на вертикальном и горизонтальном участках рамы имеют вид

$$M_1(s) = -H_A s = -s, \quad M_2(s) = -R_B s = -s.$$

Тогда

$$\delta_{11} = \frac{2}{EI} \int_0^l M_1^2(s) ds = \frac{2}{EI} \frac{l^3}{3}.$$

Определим жесткость C конструкции в направлении единичной силы

$$C = \frac{1}{\delta_{11}} = \frac{3EI}{2l^3}.$$

Частота собственных колебаний конструкции

$$\omega_c = \sqrt{\frac{C}{m}} = \sqrt{\frac{3EI}{2l^3 m}}.$$

Воспользуемся теоремой о сохранении полной механической энергии системы в процессе свободных колебаний:

$$T + \Pi = const,$$

справедливой при отсутствии сил трения в системе, и учтем, что при свободных колебаниях смещение массы происходит по гармоническому закону

$$x(t) = A \sin(\omega_c t + \varphi).$$

Тогда скорость массы выражается в виде

$$\dot{x}(t) = A \omega_c \cos(\omega_c t + \varphi).$$

Максимальные значения кинетической и потенциальной энергии:

$$T_{\max} = \frac{m \dot{x}_{\max}^2}{2} = \frac{m A^2 \omega_c^2}{2},$$

$$\Pi_{\max} = \frac{C x_{\max}^2}{2} = \frac{C A^2}{2}.$$

Так как

$$\Pi_{\max} = T_{\max},$$

то

$$\frac{m A^2 \omega_c^2}{2} = \frac{C A^2}{2}$$

или

$$\omega_c = \sqrt{\frac{C}{m}}.$$

Выводы

Механическая система с одной степенью свободы совершает свободные колебания вокруг устойчивого положения равновесия. Колебания происходят по закону $x = A \sin(\omega_c t + \varphi)$, где ω_c – частота собственных колебаний. Для конструкции собственная частота

$$\omega_c = \sqrt{\frac{3EI}{2l^3 m}}$$

и зависит от жесткости балки, массы и размеров рамы. Амплитуду колебаний A и начальную фазу φ определяют с помощью начальных условий.

Задача 3

Стальной обод круговой формы весом G и радиусом средней линии r прикреплен к неподвижной ступице радиусом r_0 посредством n штук радиальных спиц (рис. 26).

Длина спицы $l = r - r_0$. Каждая спица имеет значительное предварительное натяжение силой S_0 . Предполагая, что сила натяжения в процессе колебаний не изменяется $S = S_0$, а в точках A и B во всех спицах расположены шарниры, необходимо определить период крутильных колебаний обода.

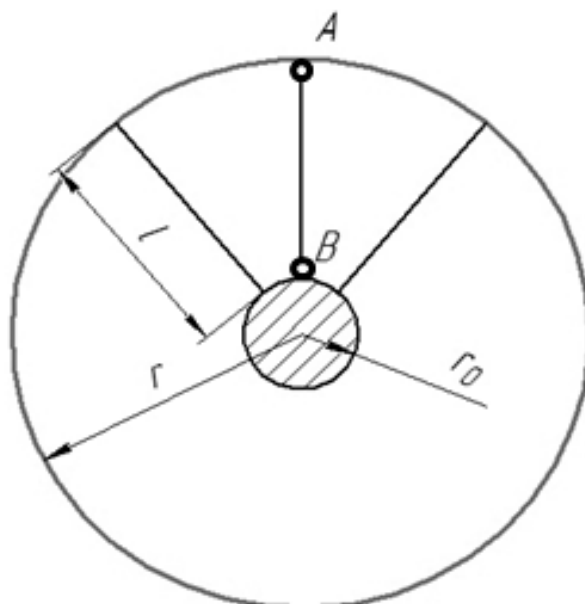


Рис. 26. Равновесное положение обода относительно ступицы

Решение

На рис. 27 показано смещение обода на малый угол φ в некоторый момент времени в процессе свободных колебаний. Так как сила S_0 не изменяется, то тангенциальная составляющая этой силы, стремящаяся вернуть массивный обод в положение устойчивого равновесия,

$$S_1 = S_0 \sin \gamma.$$

По теореме синусов для треугольника AOB

$$\frac{AB}{\sin \varphi} = \frac{OB}{\sin \gamma}.$$

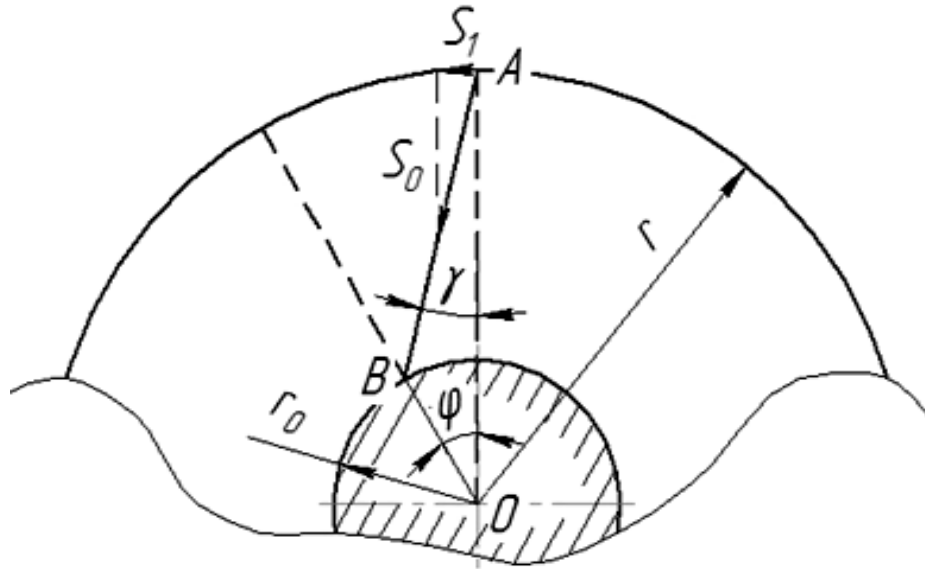


Рис. 27. Свободные колебания обода

Считаем угол φ малым, значит, $AB \approx l$, $\sin\varphi \approx \varphi$. Тогда справедливы соотношения

$$\frac{l}{\varphi} \approx \frac{r_0}{\sin\gamma}, \quad \sin\gamma = \frac{r_0\varphi}{r-r_0}.$$

Запишем второй закон Ньютона для крутильных колебаний обода относительно ступицы

$$I_m \ddot{\varphi} = \sum M_O(F),$$

где I_m – массовый момент инерции обода относительно точки O ;

$\sum M_O(F)$ – упругий момент всех сил S_1 .

Тогда

$$I_m \ddot{\varphi} = -n S_1 r.$$

Для обода массовый момент инерции

$$I_m = mR^2 = \frac{Gr^2}{g}.$$

Дифференциальное уравнение крутильных колебаний примет вид

$$\ddot{\varphi} + \frac{nS_1 r}{I_m} \varphi = 0.$$

После подстановки получим уравнение

$$\ddot{\varphi} + \frac{n S_0 r r_0 g}{(r - r_0) Gr^2} \varphi = 0,$$

из которого находим квадрат частоты крутильных колебаний обода

$$\omega_c^2 = \frac{nS_0 r_0 g}{(r-r_0)Gr}$$

Период крутильных колебаний обода определяют по формуле

$$T = \frac{2\pi}{\omega_c} = 2\pi \sqrt{\frac{(r-r_0)Gr}{nS_0 r_0 g}}$$

Вывод

Чем больше масса обода, тем больше период колебаний. Увеличение начального натяжения спиц приводит к снижению периода колебаний.

Задача 4

Определить частоты собственных колебаний в плоскостях взмаха и качания жесткой лопасти несущего винта вертолета типа Ми-8.

Решение

Несущий винт (НВ) вертолета (рис. 28) состоит из втулки и пяти лопастей, которые крепят к втулке НВ с помощью горизонтального шарнира (ГШ) и вертикального шарнира (ВШ). На рис. 28 показаны разномы горизонтального $a_{ГШ}$ и вертикального $a_{ВШ}$ шарниров.

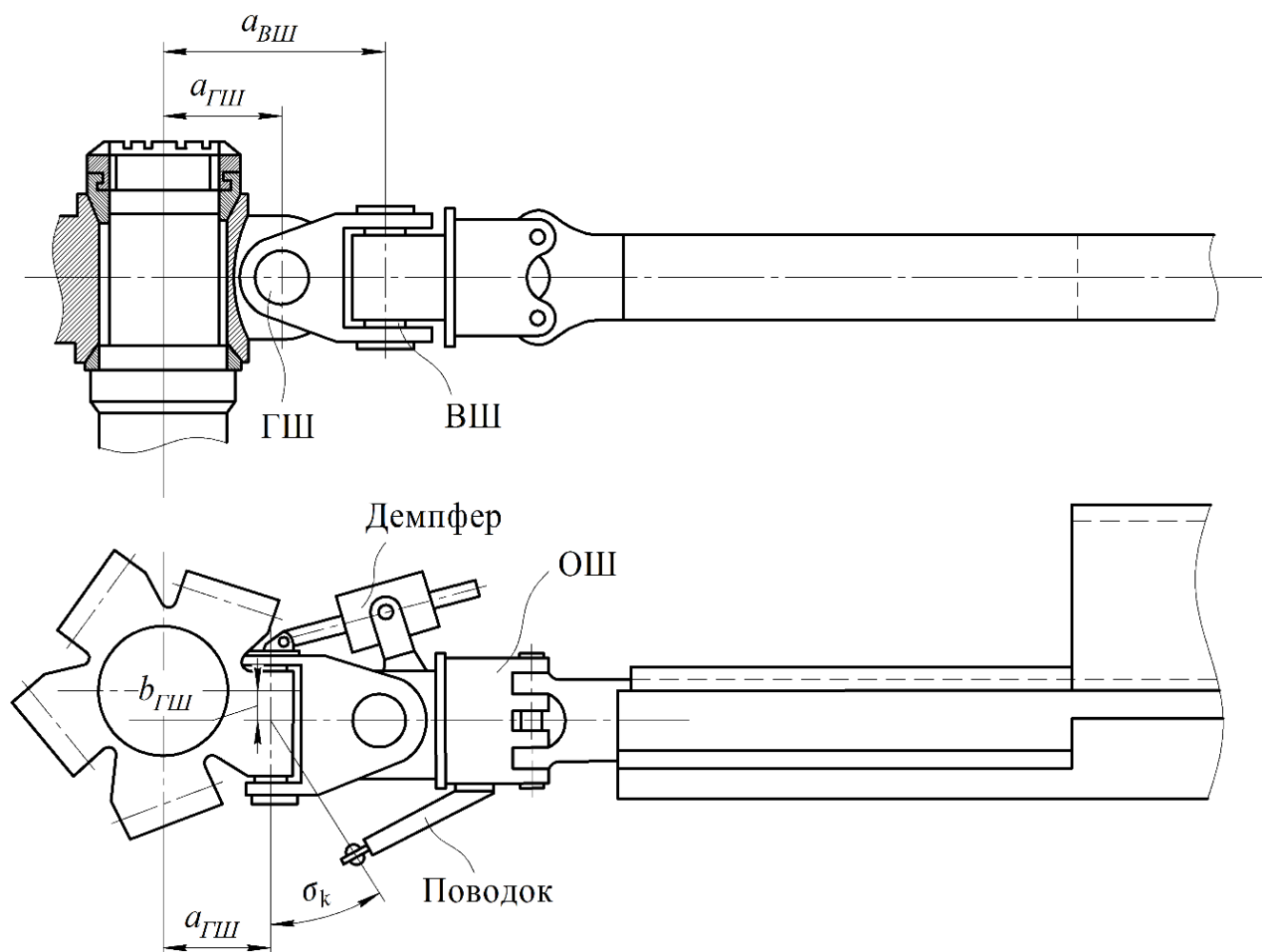


Рис. 28. Схема втулки несущего винта вертолета

Частота собственных колебаний лопасти в плоскости взмаха

Несущий винт вертолета вращается с угловой скоростью ω (рис. 29). Лопасть имеет определенную погонную массу $m_n(r)$. Определим частоту маховых колебаний вращающейся лопасти, пренебрегая ее упругостью.

Равновесное положение вращающейся лопасти показано на рис. 29. Центробежные силы стремятся вернуть лопасть в равновесное горизонтальное положение. После внешнего возмущения, отклонившего лопасть, совершаются свободные маховые колебания вокруг горизонтального шарнира A .

Рассмотрим связанную с втулкой неинерциальную, вращающуюся с угловой скоростью НВ, систему координат.

Лопасть как абсолютно жесткое тело имеет одну степень свободы, характеризуемую углом взмаха β , который отсчитывают от плоскости вращения винта. Угол β – положительный при взмахе вверх.

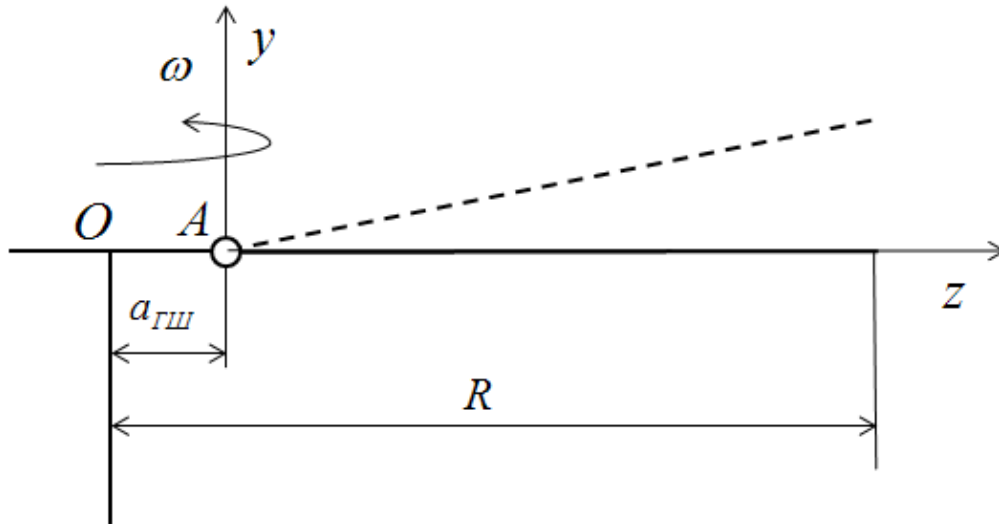


Рис. 29. Равновесное положение вращающейся лопасти

На элементарную массу dm , расположенную на расстоянии r от ГШ, при отклонении от положения равновесия действует центробежная сила инерции, направленная от оси вращения:

$$dF_{цб} = dm\omega^2\rho = m_n dr\omega^2\rho,$$

где ρ – расстояние от оси вращения до элемента массы dm :

$$\rho = a_{ГШ} + r \cos \beta,$$

r – расстояние от ГШ до элемента dm .

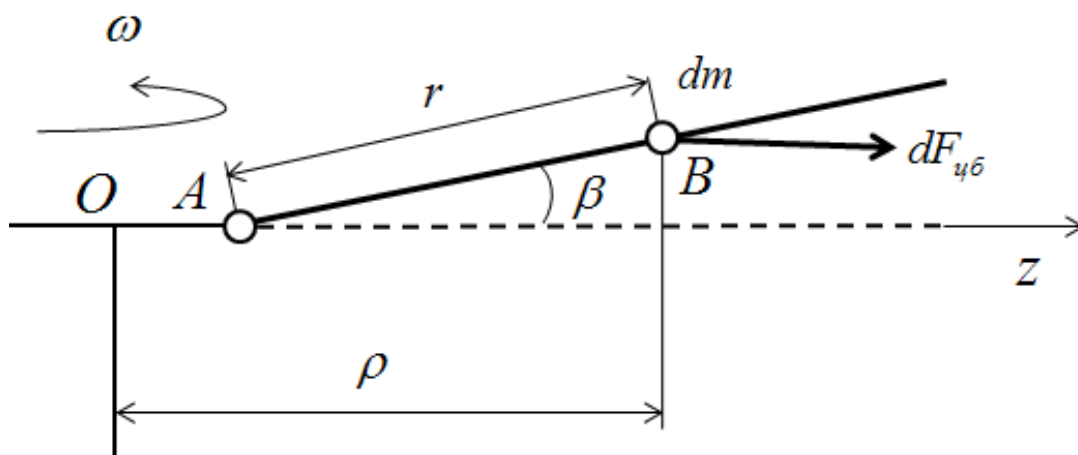


Рис. 30. Маховые колебания лопасти

Уравнение вращательного движения лопасти относительно ГШ, вызванное действием элементарных сил инерции, имеет вид

$$I_{\Gamma\text{Ш}}\ddot{\beta} = \sum M_A(dF_{\text{ин}}),$$

где $I_{\Gamma\text{Ш}}$ – момент инерции лопасти относительно ГШ;

$\ddot{\beta}$ – угловое ускорение от взмаха;

$\sum M_A(dF_{\text{ин}})$ – сумма моментов относительно ГШ элементарных сил инерции.

Очевидно, что в результате интегрирования по длине лопасти получим

$$\begin{aligned} I_{\Gamma\text{Ш}}\ddot{\beta} &= - \int_0^{R-a_{\Gamma\text{Ш}}} dF_{\text{ин}} \sin \beta r = - \int_0^{R-a_{\Gamma\text{Ш}}} m_n \omega^2 \rho r \sin \beta dr = \\ &= - \int_0^{R-a_{\Gamma\text{Ш}}} m_n \omega^2 (a_{\Gamma\text{Ш}} + r \cos \beta) r \sin \beta dr. \end{aligned}$$

При малых углах отклонения лопасти

$$\sin \beta \approx \beta; \quad \cos \beta \approx 1,$$

тогда

$$\begin{aligned} I_{\Gamma\text{Ш}}\ddot{\beta} &= - \int_0^{R-a_{\Gamma\text{Ш}}} m_n \omega^2 (a_{\Gamma\text{Ш}} + r) r \beta dr = \\ &= \omega^2 \beta a_{\Gamma\text{Ш}} \int_0^{R-a_{\Gamma\text{Ш}}} r dm + \omega^2 \beta \int_0^{R-a_{\Gamma\text{Ш}}} r^2 dm. \end{aligned}$$

Так как

$$\int_0^{R-a_{\Gamma\Pi\Pi}} r dm = S_{\Gamma\Pi\Pi}, \quad \int_0^{R-a_{\Gamma\Pi\Pi}} r^2 dm = I_{\Gamma\Pi\Pi},$$

где $S_{\Gamma\Pi\Pi}$ – статический момент лопасти, а $I_{\Gamma\Pi\Pi}$ – момент инерции относительно $\Gamma\Pi\Pi$, то

$$I_{\Gamma\Pi\Pi} \ddot{\beta} + \omega^2 \beta (I_{\Gamma\Pi\Pi} + S_{\Gamma\Pi\Pi} a_{\Gamma\Pi\Pi}) = 0.$$

Разделив уравнение на $I_{\Gamma\Pi\Pi}$, получим, что частота собственных колебаний вращающейся лопасти в плоскости взмаха составляет

$$\omega_{c1} = \omega \sqrt{1 + \frac{S_{\Gamma\Pi\Pi} a_{\Gamma\Pi\Pi}}{I_{\Gamma\Pi\Pi}}}.$$

Отсюда видно, что при наличии разнеса $\Gamma\Pi\Pi$ частота собственных маховых колебаний больше, чем частота вращения винта.

При $a_{\Gamma\Pi\Pi} \cong 0$

$$\omega_{c1} = \omega,$$

т. е. собственная частота маховых колебаний лопасти происходит с частотой вращения винта, а период колебаний равен времени одного полного оборота НВ:

$$T_c = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Отметим, что лопасть не «отстроена» от резонанса с частотами ω , 2ω и т. д.

Частота собственных колебаний лопасти в плоскости вращения

Равновесное положение вращающейся лопасти показано на рис. 31 пунктирной линией. При отклонении лопасти от равновесного положения центробежные силы стремятся вернуть лопасть в исходное состояние. При этом возбуждаются свободные качательные колебания лопасти вокруг вертикального шарнира A .

Свяжем с втулкой неинерциальную систему координат, вращающуюся с угловой скоростью НВ.

Считаем, что лопасть абсолютно жесткая и имеет одну степень свободы. Угол качания ξ задает положение лопасти относительно ВШ. На рис. 31 изображено отклоненное положение лопасти относительно вертикального шарнира. На элементарную массу в процессе вращения винта с угловой скоростью ω действует центробежная сила $dF_{ЦБ}$, направленная от оси вращения винта.

Уравнение вращательного движения лопасти относительно ВШ имеет вид

$$I_{ВШ}\ddot{\xi} = \sum M_{ВШ}(dF_{цб}),$$

где $I_{ВШ}$ – момент инерции лопасти относительно ВШ;

$\ddot{\xi}$ – угловое ускорение качательного движения;

$\sum M_A(dF_{цб})$ – сумма моментов относительно ВШ элементарных сил инерции.

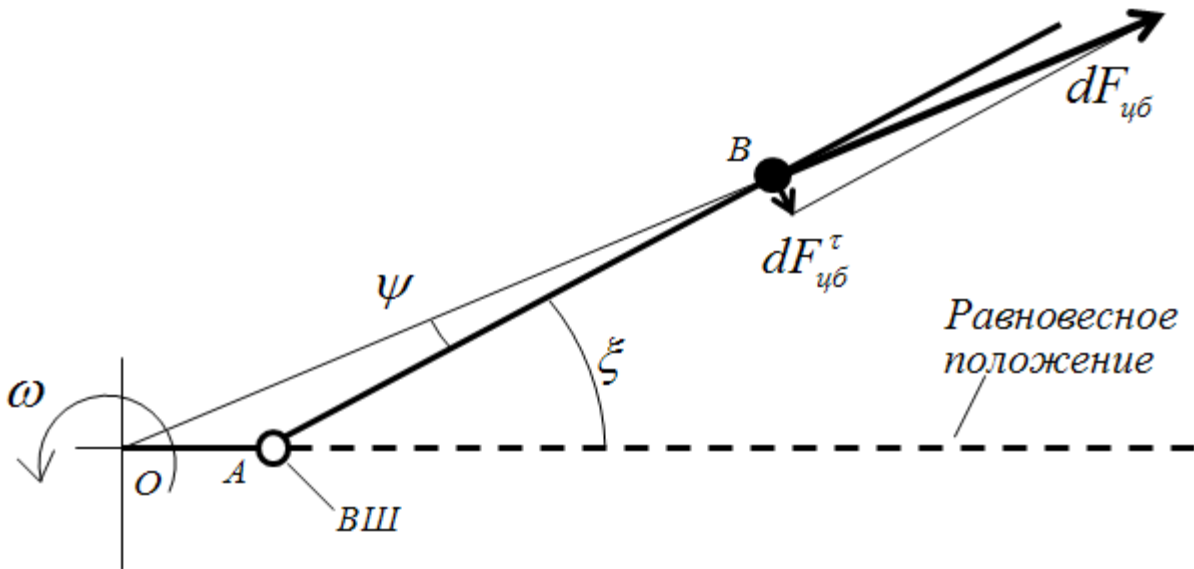


Рис. 31. Качательные колебания лопасти

Из треугольника OAB следует, что при малых ξ

$$OB \approx a_{ВШ} + r,$$

где $r = AB$.

Кроме того,

$$\frac{OA}{\sin \psi} = \frac{OB}{\sin(180-\xi)},$$

$$\sin \psi = \frac{OA \sin \xi}{OB} = \frac{a_{ВШ} \sin \xi}{a_{ВШ} + r} \approx \frac{a_{ВШ} \xi}{a_{ВШ} + r}.$$

Тогда величина центробежной силы

$$dF_{цб} = dm\omega^2 OB = m_n \omega^2 (a_{ВШ} + r) dr,$$

а ее момент вокруг ВШ

$$\begin{aligned} dM_{цб} &= -dF_{цб} \sin \psi r = -dm\omega^2 OB \sin \psi r = -m_n \omega^2 (a_{ВШ} + r) \sin \psi r = \\ &= -m_n \omega^2 (a_{ВШ} + r) \frac{a_{ВШ} \xi}{(a_{ВШ} + r)} r dr = -m_n \omega^2 a_{ВШ} \xi r dr. \end{aligned}$$

Уравнение качаний лопасти примет вид

$$I_{ВШ}\ddot{\xi} = - \int_0^{R-a_{ВШ}} m_n \omega^2 a_{ВШ} \xi r dr = - \omega^2 a_{ВШ} \xi \int_0^{R-a_{ВШ}} m_n r dr,$$

где интеграл

$$\int_0^{R-a_{ВШ}} m_n r dr = S_{ВШ}$$

– статический момент лопасти относительно ВШ. С учетом введенного обозначения дифференциальное уравнение качательных колебаний лопасти

$$I_{ВШ}\ddot{\xi} + \omega^2 a_{ВШ} \xi S_{ВШ} = 0$$

или

$$\ddot{\xi} + \frac{\omega^2 a_{ВШ} S_{ВШ}}{I_{ВШ}} \xi = 0.$$

Очевидно, что частота собственных колебаний лопасти в плоскости вращения

$$\omega_{c2} = \omega \sqrt{\frac{a_{ВШ} S_{ВШ}}{I_{ВШ}}}.$$

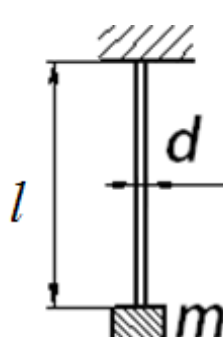
Круговая частота качательных колебаний лопасти (по статистике) с учетом значений выноса вертикального шарнира $a_{ВШ}$ и статического момента $S_{ВШ}$ находится в диапазоне

$$\omega_{c2} = (0,25 \dots 0,3)\omega.$$

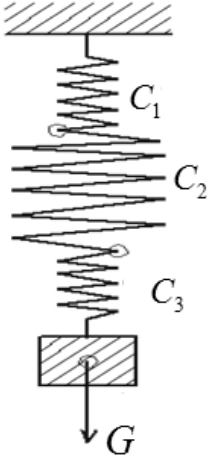
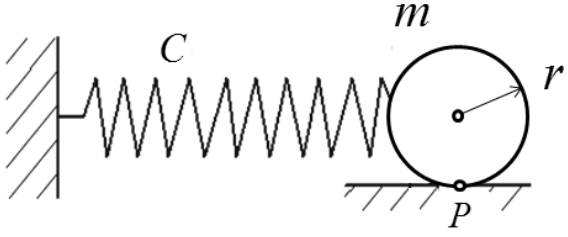
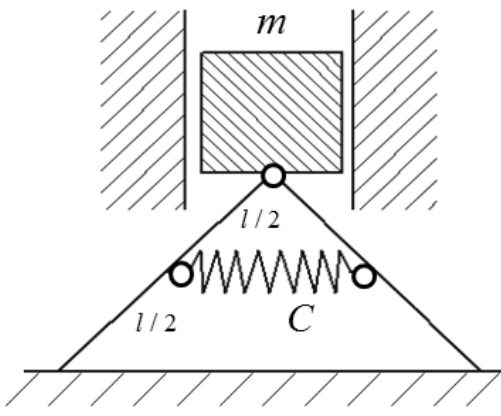
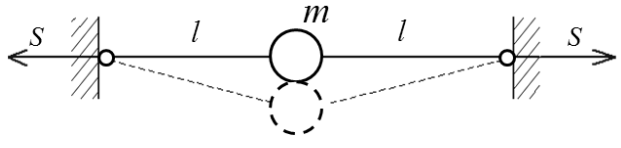
Поэтому лопасть далеко «отстроена» от резонанса с частотами ω , 2ω и т. д.

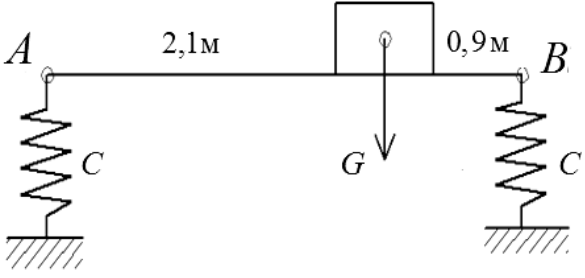
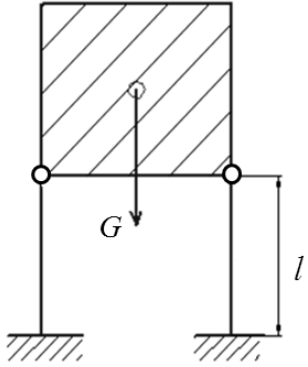
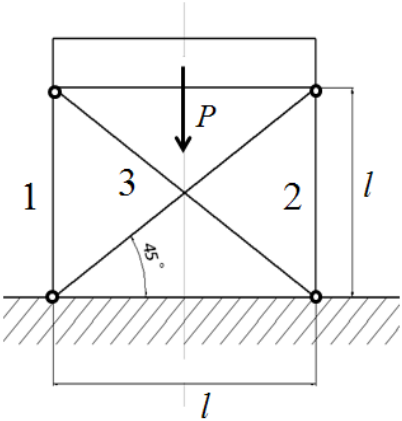
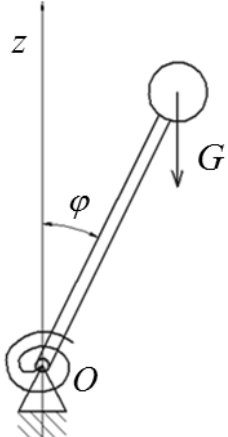
Задачи для домашнего задания 1

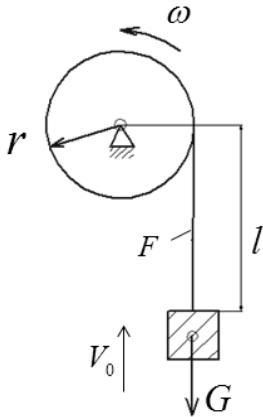
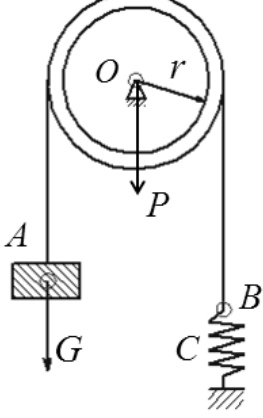
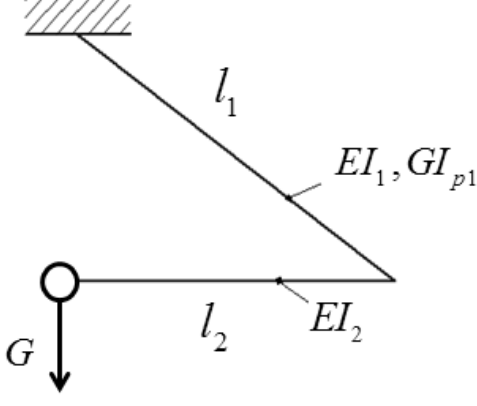
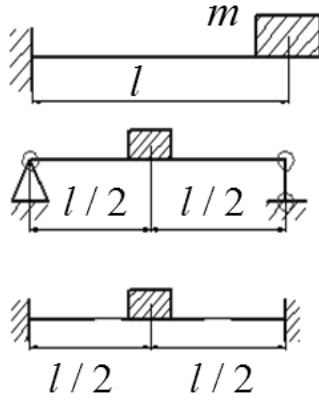
Таблица 1

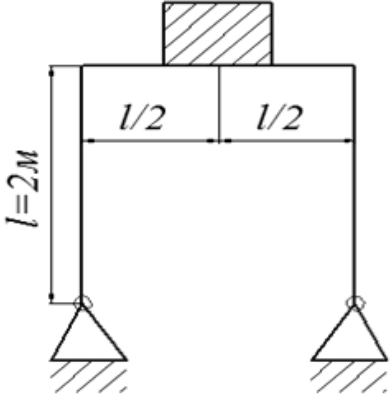
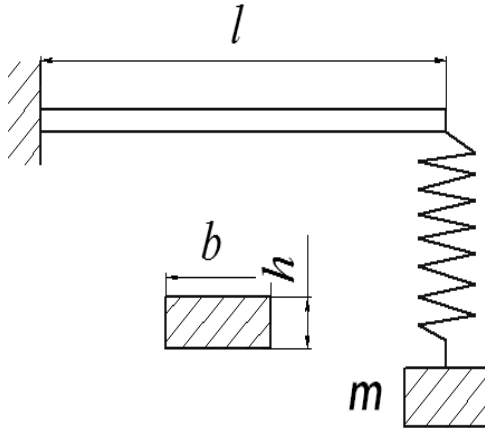
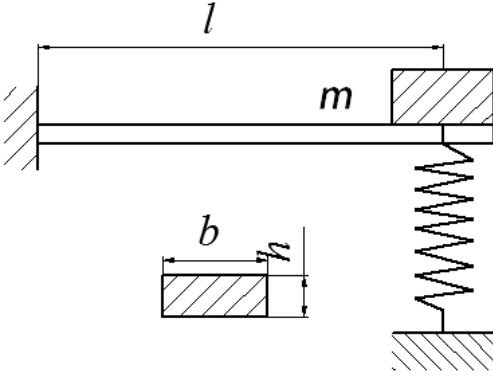
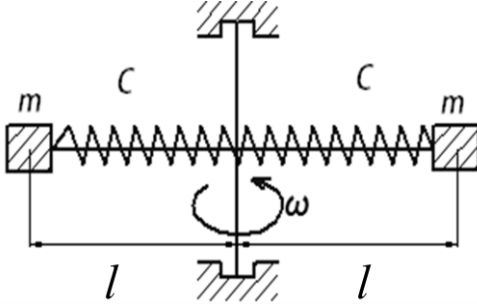
<p>1. К стальному стержню длиной $\ell = 1$ м, диаметром $d = 2$ см прикреплен груз массой $m = 50$ кг. Найти частоту и период собственных колебаний системы без учета и с учетом массы стержня. Плотность $\rho = 7,85$ т/м³, модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа</p>	 <p>The diagram shows a vertical rod of length l and diameter d fixed at the top to a ceiling. A mass m is attached to the bottom of the rod. The rod is represented by two parallel vertical lines, and the mass is a shaded rectangle.</p>
--	--

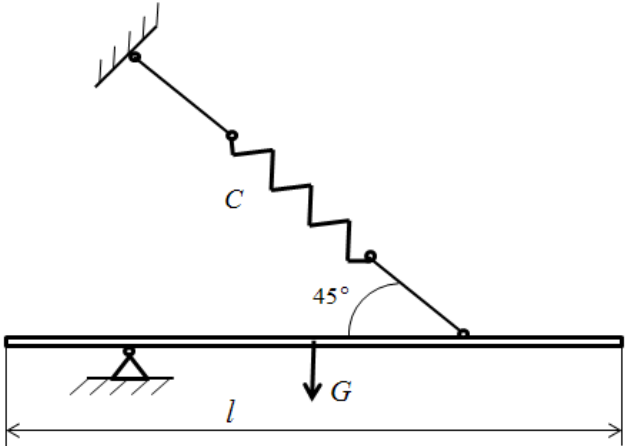
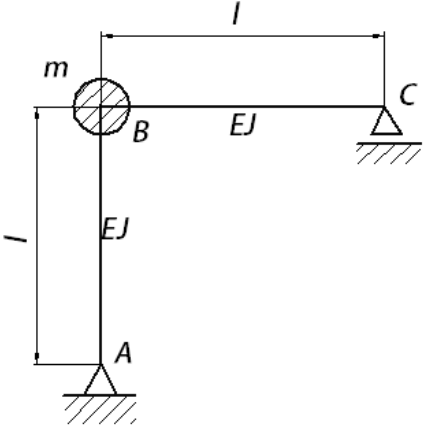
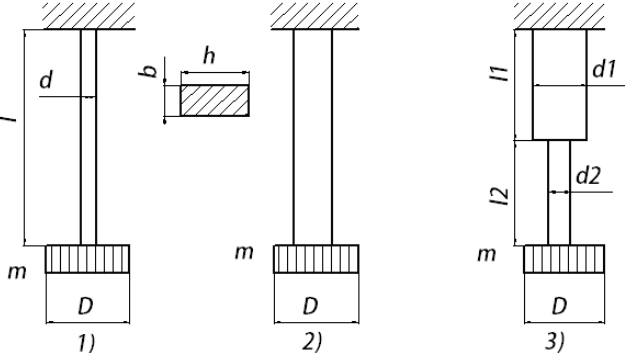
<p>2. Как изменится частота собственных колебаний груза, если от первой схемы креплений груза перейти ко второй, разрезав пружину на две равные части и закрепив груз посередине?</p>	
<p>3. Стержень AB весом G и длиной l удерживается в горизонтальном положении шарниром A и пружиной жесткостью C. Найти период колебаний стержня. Массу пружины не учитывать, стержень AB абсолютно жесткий</p>	
<p>4. На конце жесткого стержня массой m и длиной l прикрепена точечная масса M. Пружины жесткости C горизонтальны и прикреплены к середине стержня. Определить частоту собственных колебаний механической системы</p>	
<p>5. Груз массой m находится на наклонной поверхности и прикрепен к пружине жесткостью C. Определить частоту собственных колебаний системы</p>	

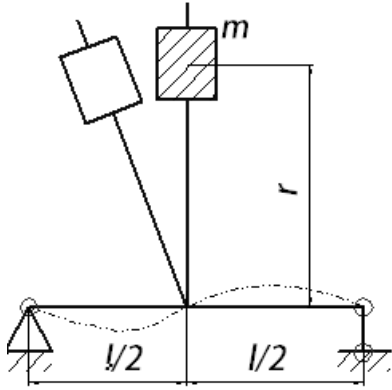
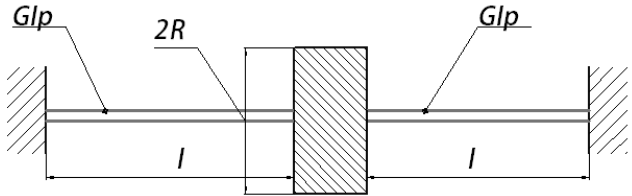
<p>6. Груз весом G поддерживается тремя пружинами, соединенными последовательно. Найти жесткость C эквивалентной пружины и частоту собственных колебаний</p>	 <p>The diagram shows a vertical mass G supported by three springs connected in series. The top spring has stiffness C_1, the middle one C_2, and the bottom one C_3. The mass is shown as a shaded rectangle with a downward arrow labeled G.</p>
<p>7. Однородный цилиндр массой m и радиусом r прикреплен к горизонтальной пружине жесткостью C. Определить частоту собственных колебаний системы, считая, что проскальзывания в точке P нет</p>	 <p>The diagram shows a cylinder of mass m and radius r attached to a horizontal spring with stiffness C. The spring is fixed to a wall on the left. The cylinder is in contact with a horizontal surface at point P. The radius r is indicated by a line from the center to the point of contact.</p>
<p>8. Масса m движется поступательно в вертикальных направляющих. Стержни скользят без трения по горизонтальной поверхности. Горизонтальная пружина жесткостью C прикреплена к середине стержней. Определить частоту собственных колебаний ω системы</p>	 <p>The diagram shows a mass m in vertical guides. It is supported by two rods of length $l/2$ that are hinged to a horizontal surface. A horizontal spring with stiffness C is attached to the midpoint of the two rods.</p>
<p>9. Масса m прикреплена к натянутому тросу длиной $2l$. Считая, что предварительное натяжение троса S при колебаниях постоянно, определить период малых поперечных колебаний массы</p>	 <p>The diagram shows a mass m attached to a string of length $2l$ with tension S. The string is fixed at both ends. A dashed line indicates the displaced position of the mass.</p>

<p>10. Балка AB жесткостью при изгибе $EI = 9 \cdot 10^4 \text{ Нм}^2$ опирается на пружины жесткостью $C = 5,4 \cdot 10^4 \text{ Н/м}$. Пренебрегая весом балки, определить период свободных колебаний груза весом $G = 5\,000 \text{ Н}$</p>	
<p>11. Груз $G = 6 \cdot 10^5 \text{ Н}$ опирается на четыре вертикальные стойки ($EI = 6 \cdot 10^6 \text{ Нм}^2$), жестко закрепленные внизу. Определить период свободных колебаний груза. Весом стоек пренебречь</p>	
<p>12. Платформа весом P опирается на абсолютно жесткие вертикальные стойки 1, 2 и подкреплена стальным тросом 3 (F – площадь троса, E – модуль упругости). Пренебрегая массой элементов 1, 2 и 3, найти период колебаний платформы</p>	
<p>13. Определить возможное положение равновесия системы со спиральной пружиной жесткостью C и частоту собственных колебаний</p>	

<p>14. Груз G поднимается с постоянной скоростью V_0. Определить максимальное напряжение в стальном тросе длиной ℓ и площадью F при внезапной остановке подъемника. $G = 4,5 \cdot 10^3$ Н, $\ell = 20$ м, $F = 1,6 \cdot 10^{-3}$ м², $E = 1,1 \cdot 10^{11}$ Н/м², $V_0 = 1$ м/с. Весом троса пренебречь</p>	
<p>15. Груз весом G подвешен к нерастяжимой нити AB, перекинутой через блок с неподвижной осью O. Вес блока – P. Его масса равномерно распределена по поверхности круга радиусом r. Конец нити B прикреплен к пружине жесткостью C. Определить частоту собственных колебаний</p>	
<p>16. Твердое тело весом G прикреплено к ломаному брусу. Изгибные жесткости участков l_1 и l_2 равны EI_1 и EI_2. Крутильная жесткость стержня 2 – GI_p. Определить частоту вертикальных колебаний тела, приняв его материальной точкой</p>	
<p>17. Определить частоту и период колебаний груза массой $m = 500$ кг, расположенного на балке двутаврового сечения № 20 а, без учета и с учетом массы балки. Длина балки $\ell = 4$ м, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа</p>	

<p>18. Определить частоту собственных вертикальных колебаний груза массой $m = 250$ кг, закрепленного посередине ригеля. Стержни рамы имеют трубчатое сечение 50×40 мм, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. Массой рамы пренебречь</p>	
<p>19. К пружине, прикрепленной к консоли длиной $\ell = 0,5$ м, подвешен груз массой $m = 1$ кг. Определить частоту собственных колебаний системы, пренебрегая массой пружины и балки. Дано: $b = 5$ см, $h = 1$ см, средний диаметр пружины $D = 10$ см, диаметр проволоки $d = 0,5$ см, число витков $n = 10$, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $G = 8 \cdot 10^4$ МПа</p>	
<p>20. Груз массой $m = 0,5$ кг закреплен на консоли, конец которой опирается на пружину. Определить частоту собственных колебаний груза без учета массы упругой системы. Дано: $b = 20$ мм, $h = 1,5$ мм, $\ell = 40$ см. Средний диаметр пружины $D = 20$ мм, диаметр проволоки $d = 1$ мм, число витков $n = 8$, $G = 8 \cdot 10^4$ МПа</p>	
<p>21. Система, состоящая из двух масс m, связанных между собой пружиной, вращается вокруг вертикальной оси. Установить зависимость частоты собственных колебаний системы от угловой скорости вращения системы ω. Жесткость полупружины – C</p>	

<p>22. Однородный брус весом G и длиной l шарнирно закреплен в точке на расстоянии четверти его длины от одного конца, тогда как на расстоянии четверти длины от другого конца он удерживается пружиной жесткостью C, образующей с ним угол 45°. Найти собственную частоту колебаний: а) в этом положении; б) после поворота системы на 90° так, чтобы брус свешивался по вертикали вниз</p>	
<p>23. Груз массой m прикреплен к плоской раме. Определить частоту собственных колебаний груза в горизонтальном направлении, не учитывая массы рамы. Стержни имеют одинаковую жесткость EI</p>	
<p>24. К нижним концам стальных стержней прикреплены диски массой $m = 100$ кг и диаметром $D = 20$ см. Определить частоту и период собственных угловых колебаний дисков для трех вариантов стержней.</p> <p>Дано: 1) $d = 5$ см, $l = 1$ м; 2) $b = 3$ см, $h = 6$ см, $l = 1$ м; 3) $d_1 = 6$ см, $d_2 = 3$ см, $l_1 = 0,6$ м, $l_2 = 0,4$ м, $G = 8 \cdot 10^4$ МПа</p>	

<p>25. На каком расстоянии r нужно укрепить массу m, чтобы частоты собственных вертикальных и горизонтальных колебаний массы совпали?</p> <p>Сечения горизонтального и вертикального стержней одинаковы. Массой стержней пренебречь</p>	
<p>26. Однородный диск массой m и радиусом R может поворачиваться. Крутильные жесткости для безмассовых валов длиной l равны GI_p. Определить частоту крутильных колебаний</p>	
<p>27. Найти период собственных колебаний кручения стального вала диаметром $d = 12$ см и длиной $l = 1,5$ м, один конец которого зашпелен, а на второй – насажен шкив с моментом инерции $J_0 = 800$ Нм²</p>	
<p>28. Стальная цилиндрическая пружина, имеющая $n = 12$ витков при среднем диаметре витка $D = 8$ см и диаметре проволоки $d = 6$ мм, растянута грузом $P = 120$ Н. Определить частоту собственных колебаний груза</p>	
<p>29. Двухтавровая балка № 27 длиной $l = 6$ м, шарнирно опертая по концам, несет посередине пролета груз $P = 30$ кН. Момент инерции двухтавра $J = 5010$ см⁴, вес одного погонного метра $q = 315$ Н/м. Определить частоту собственных колебаний без учета массы балки</p>	
<p>30. Определить частоту собственных колебаний для двухтавровой балки № 27 с моментом инерции $J = 5010$ см⁴, если груз $P = 30$ кН приложен на расстоянии $a = 1,5$ м от левой опоры. Длина балки $l = 6$ м. Собственным весом балки пренебречь</p>	

Задание 2

Вынужденные колебания механической системы с одной степенью свободы

Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы происходят под действием сил упругости и вынужденных сил. Следует учитывать также действие на систему сил и моментов сил трения. В задании принимается, что действуют силы вязкого трения, пропорциональные скорости движения.

Характер движения определяется не только свойствами системы, но и существенно зависит от внешних сил. При вынужденных колебаниях в систему со стороны возмущающей силы непрерывно подводится энергия, которая расходуется на преодоление имеющихся в системе сопротивлений. Когда частота возмущающей силы совпадает с частотой собственных колебаний, наступает резонанс, сопровождающийся значительным (часто опасным) увеличением амплитуд колебаний.

Цель задания:

- исследовать динамику системы при установившихся вынужденных колебаниях;
- рассчитать коэффициент динамичности и уяснить его физический смысл;
- сопоставить напряженно-деформированное состояние системы при статическом и динамическом приложении нагрузки;
- предложить конструктивные мероприятия по снижению динамических нагрузок.

Методика выполнения

Колебания упругой системы, которые вызываются и поддерживаются возмущающими силами, заданными в виде явных функций времени, называются вынужденными.

Физическая природа таких сил весьма разнообразна. Они могут быть как периодическими, так и случайными функциями времени. Наиболее часто на практике встречаются возмущающие силы, меняющиеся периодически. Возможно и кинематическое возбуждение колебаний.

Уравнения установившихся вынужденных колебаний

Считаем, что массивное тело механической системы совершает или поступательное, или вращательное движение (рис. 32), а возмущающая сила изменяется по гармоническому закону

$$F_e(t) = F_0 \sin(\omega_e t), \quad (51)$$

где F_0 и ω_e – амплитуда и частота возмущающей силы.

Действуют силы вязкого трения, пропорциональные скорости движения:

$$F_{mp}(\dot{x}) = -\alpha \dot{x},$$

где α – коэффициент пропорциональности.

Движение системы (см. рис. 32, а) описывается дифференциальным уравнением

$$m\ddot{x} = F_e(t) - F_{yup}(x) - F_{mp}(\dot{x}).$$

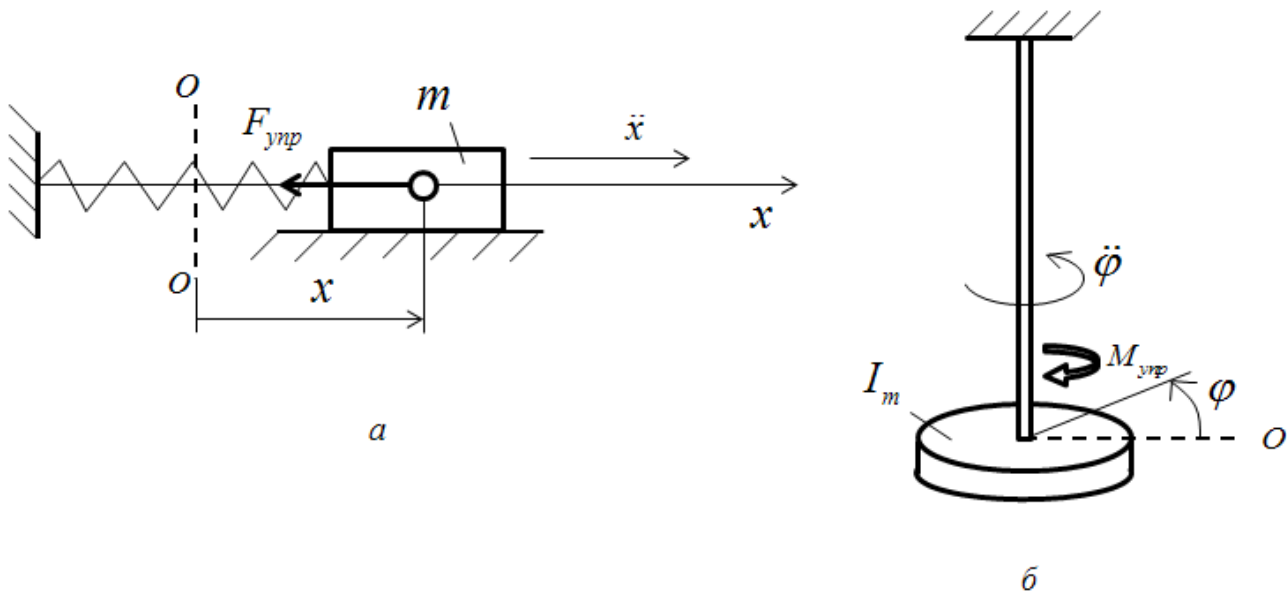


Рис. 32. Вынужденные колебания систем с одной степенью свободы

После подстановки выражений для сил и преобразований получим неоднородное дифференциальное уравнение вынужденных колебаний

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + Cx = F_0 \sin(\omega_e t) \quad (52)$$

или

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega_c^2 x = \frac{F_0}{m} \sin(\omega_e t), \quad (53)$$

где $n = \frac{\alpha}{2m}$ – коэффициент трения;

$\omega_c = \sqrt{C/m}$ – частота собственных колебаний.

При наличии внешних гармонических сил $F_e(t)$, действующих на систему, опасность представляет резонанс – совпадение частоты внешних возмущений ω_e с частотой собственных колебаний:

$$\omega_c = \omega_e .$$

При резонансе внешняя сила, действуя в такт с движением системы и совершая положительную работу, способна очень быстро увеличить амплитуду колебаний до опасных значений. Из-за действия сил трения, направленных противоположно скорости движения, амплитуды колебаний при вынужденных колебаниях будут ограничены.

Следует избегать резонанса из-за опасности разрушения системы. Если избежать резонанса невозможно, то конструкторы применяют в системе устройства, создающие большие силы трения, – демпферы (гидравлические и др.).

Полное решение уравнения (53) – сумма общего и частного решений:

$$x = e^{-\frac{\alpha t}{2m}} (C_1 \sin \omega_{c\delta} t + C_2 \cos \omega_{c\delta} t) + x_0 \sin(\omega_g t - \varphi). \quad (54)$$

Напомним, что частота затухающих свободных колебаний

$$\omega_{c\delta} = \sqrt{\omega_c^2 - n^2}.$$

Свободные колебания быстро затухают (первое слагаемое в формуле (54)) и наступает установившееся движение с частотой ω_g .

Отметим физические закономерности для установившегося движения, а также соотношения между действующими силами и перемещениями.

Установившееся движение происходит в виде

$$x = x_0 \sin(\omega_g t - \varphi), \quad (55)$$

где x_0 и φ – амплитудные отклонения и сдвиг фазы между силой и перемещением.

Запишем выражение (52) в виде четырех слагаемых, каждое из которых представляет силу

$$(-m\ddot{x}) + (-\alpha\dot{x}) + (-Cx) + F_o \sin(\omega_g t) = 0. \quad (56)$$

Очевидно, что из уравнения (55) следует соотношение

$$\dot{x} = x_0 \omega_g \cos(\omega_g t - \varphi)$$

и сила трения

$$\begin{aligned} -\alpha\dot{x} &= -\alpha x_0 \omega_g \cos(\omega_g t - \varphi) = \alpha x_0 \omega_g \cos(\omega_g t - \varphi - \pi) = \\ &= \alpha x_0 \omega_g \sin(\omega_g t - \varphi - \pi / 2), \end{aligned}$$

т. е. вектор силы $(-\alpha\dot{x})$ имеет амплитудную величину $\alpha x_0 \omega_g$ и отстает по фазе от вектора x_0 на угол $\pi / 2$.

Ускорение

$$\ddot{x} = -x_0 \omega_g^2 \sin(\omega_g t - \varphi),$$

поэтому сила инерции

$$-m\ddot{x} = m x_0 \omega_g^2 \sin(\omega_g t - \varphi),$$

т. е. вектор силы $(-m\ddot{x})$ имеет амплитудную величину $m x_0 \omega_g^2$ и совпадает по фазе с вектором x_0 .

Силу упругости представим в виде

$$-Cx = -Cx_0 \sin(\omega_g t - \varphi) = Cx_0 \sin(\omega_g t - \varphi + \pi),$$

т. е. вектор $(-Cx)$ имеет амплитудную величину Cx_0 и опережает по фазе на π вектор x_0 .

Тогда

$$m x_0 \omega_g^2 \sin(\omega_g t - \varphi) + \alpha x_0 \omega_g \sin(\omega_g t - \varphi - \pi / 2) + Cx_0 \sin(\omega_g t - \varphi + \pi) + F_0 \sin(\omega_g t) = 0. \quad (57)$$

Из выражений (56) и (57) следует, что в *любой момент времени* сумма проекций четырех сил на направление, перпендикулярное τ , должна равняться нулю. Угловое положение вектора силы F_0 задают углом $\omega_g t$, который отсчитывают от произвольно заданного направления τ .

Воспользуемся векторной интерпретацией для описания установившегося движения. Отложим перемещение x_0 в виде вектора, направленного вертикально вверх. На векторной диаграмме (рис. 33) он изображен пунктиром.

Восстанавливающая сила $(-Cx)$ имеет амплитуду Cx_0 и направлена на диаграмме вертикально вниз.

Сила затухания $-\alpha\dot{x}$ имеет амплитуду $\alpha\omega_g x_0$ и повернута на прямой угол в положительном направлении по отношению к восстанавливающей силе.

Сила инерции $-m\ddot{x}$ повернута на 90° в сторону вращения по отношению к силе затухания и имеет амплитуду $m\omega_g^2 x_0$.

Возмущающая сила $F_0 \sin \omega_g t$ расположена под углом φ к перемещению $x_0 \sin(\omega_g t - \varphi)$ и тоже повернута в сторону вращения.

Согласно второму закону Ньютона ((56) и (57)) сумма проекций всех четырех сил равна нулю в каждый момент времени. Это значит, что геометрическая сумма четырех векторов (рис. 33) должна быть равна нулю, откуда следует, что равна нулю не только сумма вертикальных проекций всех этих векторов, но также и сумма их горизонтальных проекций:

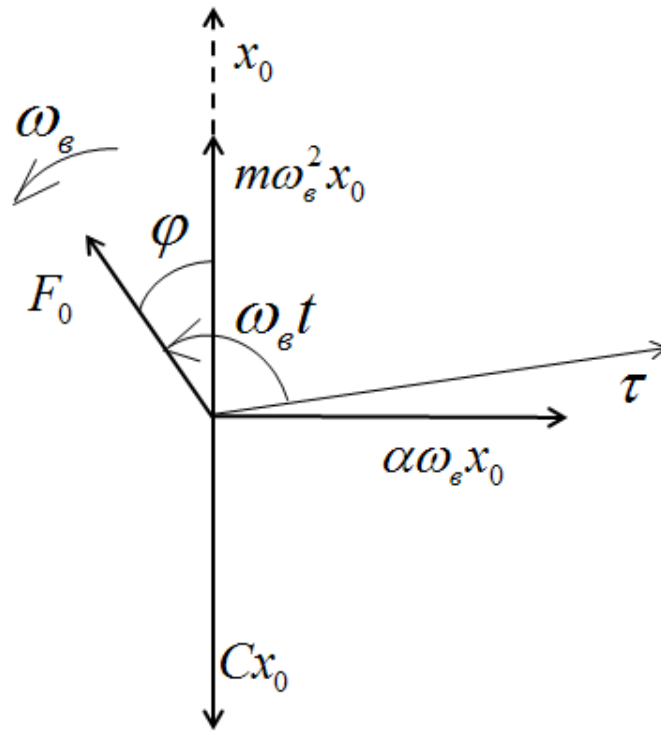


Рис. 33. Векторная диаграмма действующих сил

– по вертикали

$$cx_0 - m\omega_\epsilon^2 x_0 - F_0 \cos \varphi = 0;$$

– по горизонтали

$$\alpha\omega_\epsilon x_0 - F_0 \sin \varphi = 0.$$

Из этих уравнений можно определить, что

$$\begin{aligned}
 x_0 &= \frac{F_0}{\sqrt{(\alpha\omega_\epsilon)^2 + (c - m\omega_\epsilon^2)^2}} = \frac{F_0}{m\sqrt{4n^2\omega_c^2 + (\omega_c^2 - \omega_\epsilon^2)^2}} = \\
 &= \frac{F_0}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_\epsilon^2}{\omega_c^2}\right)^2 - \left(2\frac{\alpha}{\alpha_k} \frac{\omega_\epsilon}{\omega_c}\right)^2}}; \tag{58}
 \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2n\omega_\epsilon}{\omega_c^2 - \omega_\epsilon^2} = \frac{\alpha\omega_\epsilon}{c - m\omega_\epsilon^2} = \frac{2\frac{\alpha}{\alpha_k} \frac{\omega_\epsilon}{\omega_c}}{1 - \left(\frac{\omega_\epsilon^2}{\omega_c^2}\right)}, \tag{59}$$

где ω_c – частота собственных колебаний;

α_k – критическое значение коэффициента демпфирования, равное

$$\alpha_k = 2m\omega_c.$$

Отношение

$$\delta_{ст} = \frac{F_0}{C}$$

– это перемещение, которое появляется при статическом приложении амплитудного значения возмущающей силы.

Отношение x_0 к так называемой равновесной амплитуде $\delta_{ст}$ – это коэффициент динамичности

$$\beta = \frac{x_0}{\delta_{ст}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{4n^2\omega_в^2}{\omega_c^4} + \left(1 - \frac{\omega_в^2}{\omega_c^2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\delta}{\pi}\right)^2 \frac{\omega_в^2}{\omega_c^2} + \left(1 - \frac{\omega_в^2}{\omega_c^2}\right)^2}}, \quad (60)$$

где логарифмический декремент затухания такой:

$$\delta = \frac{2\pi n}{\omega_c}.$$

Изменение коэффициента динамичности при различных значениях логарифмического декремента затухания показано на рис. 34, а изменение угла сдвига фазы при разных значениях α/α_k – на рис. 35.

Графики зависимости коэффициента динамичности β и фазы φ от частотной расстройки $\omega_в/\omega_c$ при фиксированном значении относительного коэффициента демпфирования n/ω_c называются *амплитудно-частотной характеристикой* (АЧХ) и соответственно *фазово-частотной характеристикой* (ФЧХ).

На АЧХ и ФЧХ следует различать три области – дорезонансную, резонансную и послерезонансную.

В дорезонансной области ($0 \leq \omega_в/\omega_c < 0,75$; $0 \leq \varphi \leq 0,5\pi$) коэффициент динамичности β незначительно отличается от единицы (амплитуда установившихся вынужденных колебаний близка к статическим перемещениям от амплитудного значения вынуждающей силы).

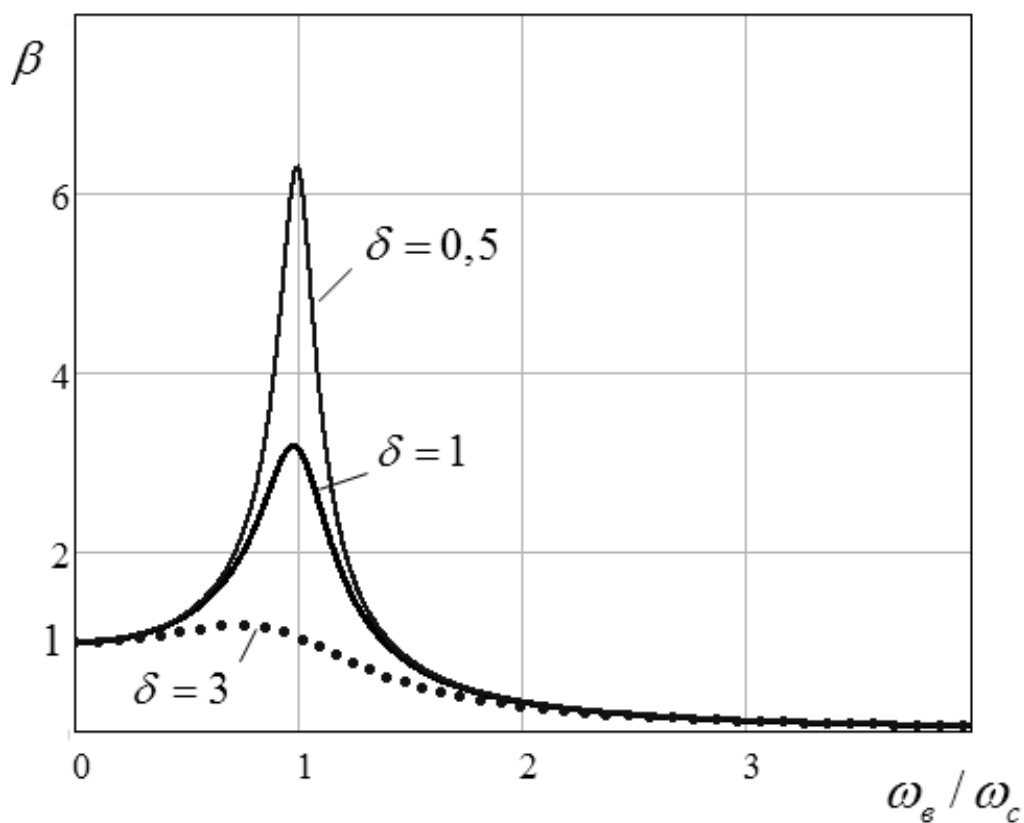


Рис. 34. Изменение коэффициента динамичности

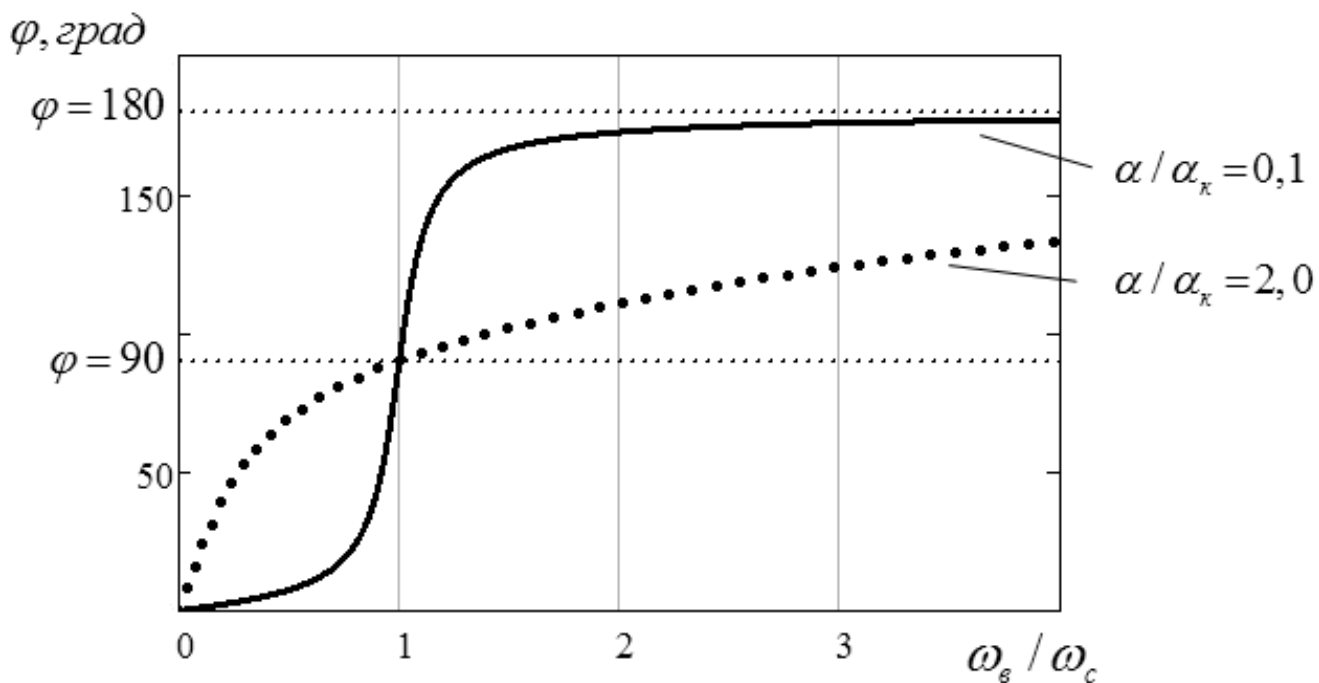


Рис. 35. Изменение угла сдвига фазы от ω_b/ω_c

В резонансной области ($0,75 \leq \omega_B/\omega_c < 1,25$; $\varphi \approx 0,5\pi$) коэффициент динамичности β значительно отличается от единицы (амплитуда установившихся вынужденных колебаний больше, чем статические перемещения).

В зарезонансной области ($1,25 \leq \omega_B/\omega_c < \infty$; $0,5\pi \leq \varphi < \pi$) коэффициент динамичности β приближается к нулю, т. е. высокочастотная вынуждающая сила практически не вызывает вынужденных колебаний.

Вид кривых АЧХ и ФЧХ зависит от величины трения в колебательной системе n/ω_c . Возможны четыре случая – трения нет ($n/\omega_c = 0$), трение мало, трение критическое и трение большое.

В первом случае указанные кривые имеют разрыв, во втором – ($n/\omega_c < 1/\sqrt{2} \approx 0,7$) – они непрерывные, а АЧХ имеет максимум в интервале $0 \leq \omega_B/\omega_c < 1$ (до точного резонанса). Приравнивая к нулю производную от β по $(\omega_B/\omega_c)^2$, получаем абсциссу и ординату этого максимума

$$\omega_B/\omega_c = \sqrt{1 - 2(n^2/\omega_c^2)}, \quad \beta_{max} = \omega_c^2/2n\sqrt{\omega_c^2 - n^2}.$$

Отсюда следует, что максимум расположен в диапазонах

$$0 < \frac{n^2}{\omega_c^2} \leq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq \omega_B/\omega_c \leq 1.$$

Координата максимума уменьшается при возрастании трения (см. рис. 34). Наименьшее значение коэффициента динамичности равно единице при $\omega_B/\omega_c = 0$.

При малом трении угол сдвига фазы между силой и перемещением близок к нулю, при резонансе он равен $\pi/2$ и стремится к π радиан при большой частоте возмущающей силы. Характер увеличения угла от ω_B/ω_c сильно зависит от трения в системе.

Третий случай ($n/\omega_c = 1/\sqrt{2}$) – критический, так как $\beta_{max} = 1$ и резонанса нет – отсутствует увеличение амплитуды колебаний выше статического перемещения. Кривая АЧХ – монотонно падающая и при $\omega_B/\omega_c = 1$ $\beta = 1/\sqrt{2} \approx 0,7$.

В четвертом случае (большое трение, $n/\omega_c > 1/\sqrt{2}$) кривые АЧХ также монотонно падают. АЧХ начинаются в точке $\omega_B/\omega_c = 0$, $\beta = 1$, которая не является для них экстремумом, а при $\omega_B/\omega_c = 1$ $\beta \ll 1$.

При очень малом трении максимальное значение коэффициента динамичности β не намного больше, чем его значение при точном резонансе

$\omega_b / \omega_c = 1$. Последнее легко вычислить, если в качестве максимального значения коэффициента принять

$$\beta_{max} \approx \frac{\omega_c}{2n} = Q = \frac{\pi}{\delta},$$

где Q – добротность колебательной системы.

Обратимся к векторной диаграмме, изображенной на рис. 31, и проследим, как изменяются в зависимости от изменения частоты ω_g амплитуда и сдвиг фазы. Для очень медленных колебаний $\omega_g \approx 0$ затуханием и силой инерции можно пренебречь, тогда $F_0 = Cx_0$ и $\varphi = 0$ – действующая сила уравновешивается силой упругости (рис. 36, а). Направление силы и перемещения совпадают, а действующая сила уравновешивается силой упругости.

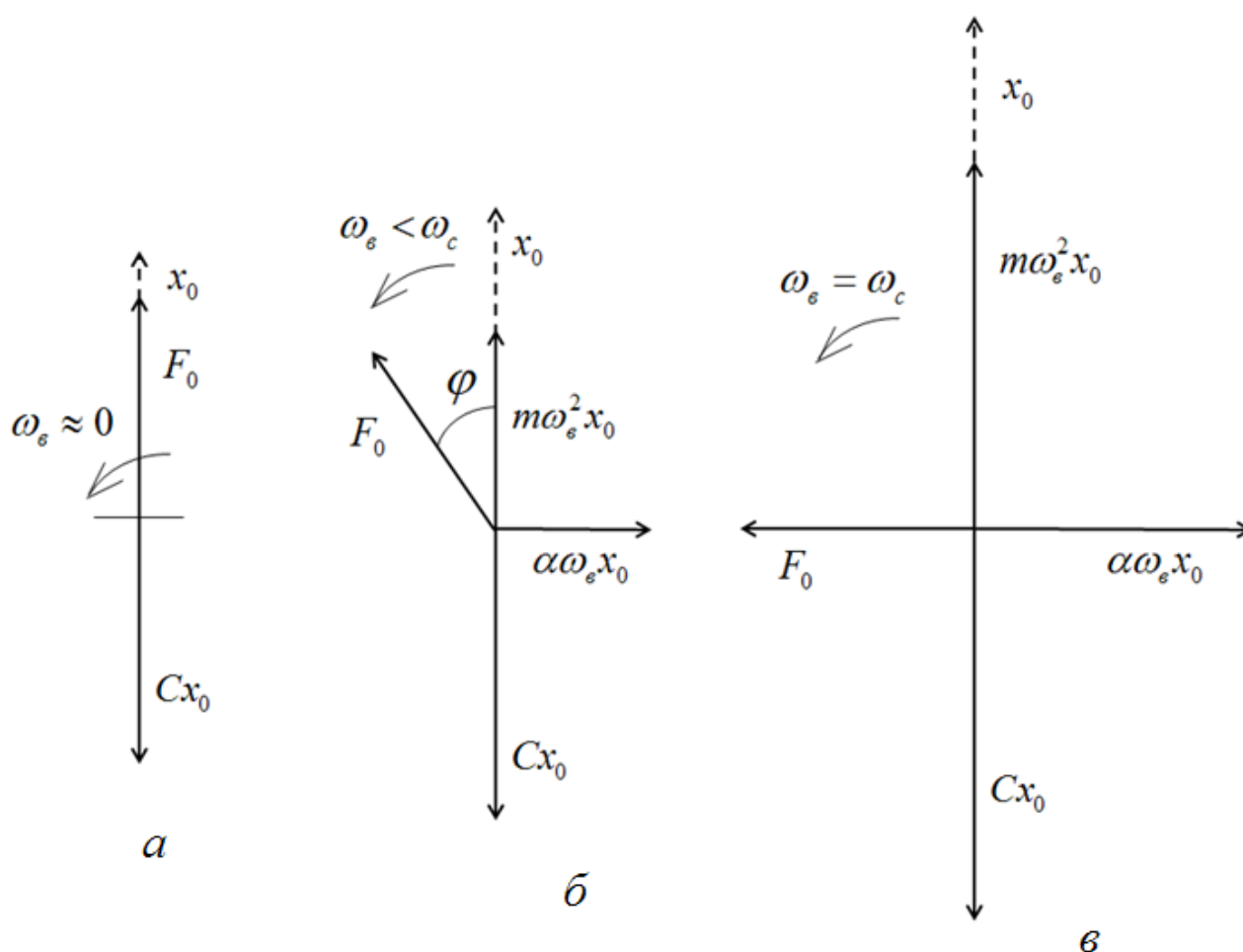


Рис. 36. Изменение векторной диаграммы при изменении частоты ω_g

С возрастанием частоты вектор (рис. 36, б), изображающий силу затухания, увеличивается, а сила инерции возрастает еще быстрее. Сдвиг фазы не может больше оставаться равным нулю, поскольку сила F_0 должна иметь

горизонтальную составляющую слева, чтобы уравновесить $\alpha\omega_\epsilon x_0$. Величина x_0 увеличивается.

Вектор силы инерции будет увеличиваться до тех пор, пока по величине не станет равным восстанавливающей силе или силе упругости пружины (см. рис. 36, в). Тогда $\varphi = \pi/2$ и $F_0 = \alpha\omega_\epsilon x_0$, а это справедливо при резонансе, так как $m\omega_\epsilon^2 x_0 = Cx_0$ или $\omega_c^2 = C/m$. Итак, при резонансе сдвиг фазы равен $\pi/2$ независимо от затухания.

При увеличении (рис. 37) частоты величина $m\omega_\epsilon^2 x_0$ увеличивается интенсивнее, чем Cx_0 , вследствие чего F_0 получит наклон вниз и φ будет больше, чем $\pi/2$. Для очень высоких частот Cx_0 незначительно по сравнению с $m\omega_\epsilon^2 x_0$, поэтому F_0 будет уравновешивать силу инерции и тогда $\varphi = \pi$. Сила и отклонение точки при колебаниях происходят в противофазе. При больших частотах амплитудные отклонения точки уменьшаются.

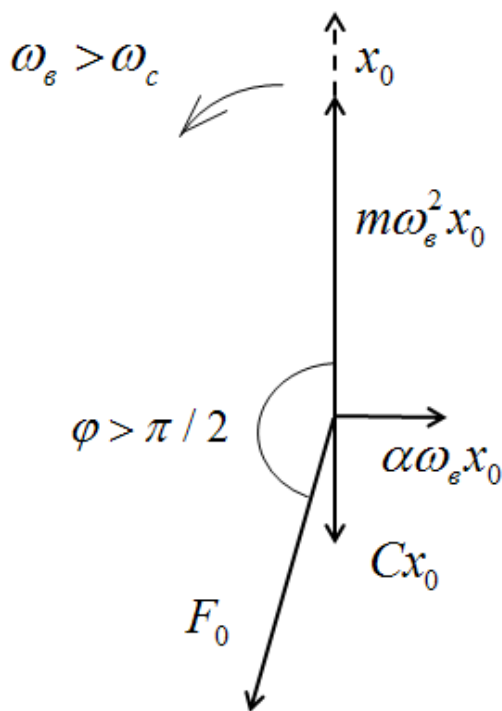


Рис. 37. Уменьшение отклонения точки при высоких частотах внешней силы

При малых скоростях возмущающая сила преодолевает силу упругости, при больших – инерцию, а при резонансе – уравновешивает силу затухания.

Для лучшего уяснения физической стороны явления используем энергетические соображения. Пусть сила

$$F = F_0 \sin(\omega_b t + \varphi)$$

действует на тело, движущееся по закону $x = x_0 \sin(\omega_B t)$.

Работа, совершаемая силой за время одного полного колебания,

$$A = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_B}} F \frac{dx}{dt} dt = \frac{1}{\omega_B} \int_0^{2\pi} F \frac{dx}{dt} d(\omega_B t) = \pi F_0 x_0 \sin \varphi. \quad (61)$$

Для очень медленных движений $\varphi = 0$ и за *полный период* никакая работа не совершается. При резонансной частоте $\varphi = \pi/2$ величина рассеянной энергии за один период равна $\pi F_0 x_0$. В этом случае возмущающая сила численно равна и противоположна силе затухания, а сила упругости равна силе инерции, но противоположна ей по фазе. Таким образом, она находится в одной фазе с перемещением.

Оценим резонансную амплитуду на основании энергетических соображений. Энергия, рассеянная за один период вследствие затухания, равна $\pi \alpha \omega_B x_0^2$, а работа возмущающей силы – $\pi F_0 x_0$, следовательно,

$$\pi F_0 x_0 = \pi \alpha \omega_B x_0^2. \quad (62)$$

Это соотношение показано на рис. 38, где по оси абсцисс отложены амплитуды, а по оси ординат – величина работы за один период, причем одна кривая соответствует работе силы F_0 , а другая – работе силы затухания.

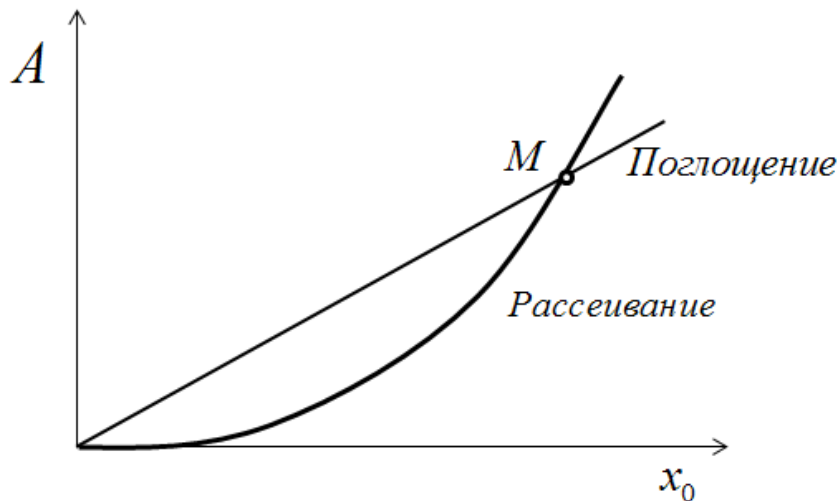


Рис. 38. Работа возмущающей силы и силы демпфирования за один период

В точке пересечения кривых имеем энергетическое равновесие, а x_0 – это амплитуда колебаний, которая устанавливается самостоятельно. Если в некоторый момент времени амплитуда станет больше, то рассеяние энергий

будет больше, чем ее приток, что влечет за собой постепенное уменьшение кинетической энергии системы до тех пор, пока не будет достигнута амплитуда, соответствующая указанному равновесию. Разрешая уравнение (62) относительно x_0 , имеем

$$(x_0)_{рез} = \frac{F_0}{\alpha \omega_c}. \quad (63)$$

Таким образом, $(x_0)_{рез}$ есть амплитуда при частоте, когда сдвиг фазы равен $\pi/2$. Эта частота в точности не соответствует наибольшему значению амплитуды. Однако частоты настолько близки друг к другу по величине, что очень хорошее приближенное значение наибольшей амплитуды можно получить, приравнявая работу возмущающей силы энергии, рассеиваемой при затухании.

Выводы

1. При резонансе даже небольшая возмущающая сила вызывает значительные перемещения (деформации, напряжения).

2. Значительное увеличение амплитуды колебаний происходит не только при точном резонансе ($\omega_B / \omega_c = 1$), но и в некоторой его окрестности – резонансной области.

3. Даже небольшое трение значительно ограничивает амплитуду резонансных колебаний и поэтому должно быть учтено при расчетах. За резонансной зоной трение можно не учитывать.

4. При большом трении ($n/\omega_c > 1/\sqrt{2}$) чисто вынужденные колебания даже в резонансной области не будут резонансными.

5. Трение увеличивает сдвиг фазы колебаний. При точном резонансе независимо от величины трения сдвиг фазы равен $0,5\pi$.

Вычисление напряжений в упругой системе при колебаниях

В положении равновесия в системе действуют статические деформации $\delta_{ст}$ и соответствующие им статические напряжения ($\sigma_{ст}$ или $\tau_{ст}$).

Упругая система, выведенная из равновесия, приходит в колебательное движение. Колебания происходят около положения упругого равновесия. При колебаниях к статическим деформациям добавляются динамические, зависящие от вида колебательного движения и амплитуды колебаний x_0 .

Таким образом, при расчете колеблющейся системы необходимо уметь вычислять динамические добавки к статическим деформациям и соответствующие им напряжения.

При колебаниях систем с одной степенью свободы полные деформации системы в каком-либо сечении могут быть найдены путем сложения статической деформации с добавочной деформацией при колебаниях. Для проверки прочности системы необходимо найти наиболее опасное сечение с наибольшей в процессе колебаний суммарной величиной деформации

$$\delta_d = \delta_{ст max} + x_0 = \delta_{ст max} \left(1 + \frac{x_0}{\delta_{ст max}} \right) = K_D \delta_{ст max}, \quad (64)$$

где коэффициент динамичности при колебаниях

$$K_D = 1 + \frac{x_0}{\delta_{ст max}}. \quad (65)$$

Пока система деформируется в пределах упругости, напряжения пропорциональны деформациям, поэтому

$$\sigma_d = \sigma_{ст max} \left(1 + \frac{x_0}{\delta_{ст max}} \right) = K_D \sigma_{ст max}. \quad (66)$$

Условие прочности должно иметь вид

$$\sigma_d = K_D \sigma_{ст max} \leq [\sigma]. \quad (67)$$

Пример выполнения задания 2

Двигатель весом $P = 9$ кН, укрепленный на конце консольной балки (рис. 39) длиной $l = 1$ м, совершает $n_0 = 800$ об/мин. При работе двигателя возникает центробежная сила инерции, равная $S = 10^{-3} n_0^2$, Н. Поперечное сечение балки состоит из двух симметрично расположенных относительно силовой плоскости равнобоких уголков 140×12 мм. Определить наибольшее нормальное напряжение в балке. Найти число оборотов двигателя, при котором возникает явление резонанса, и соответствующее наибольшее нормальное напряжение. При расчетах учесть силы сопротивления, пропорциональные скорости колебательного движения. Коэффициент затухания колебаний принять равным $n = 5 \text{ с}^{-1}$. Массой балки пренебречь.

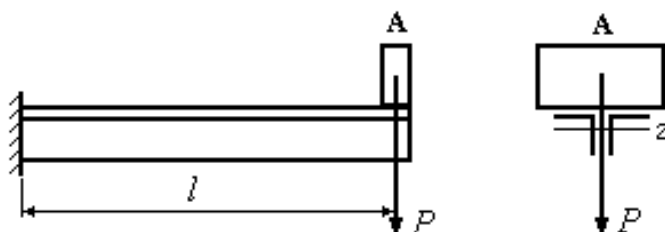


Рис. 39. Колебания неуравновешенного двигателя на балке

Решение

1. Из сортамента прокатной стали выберем необходимые данные для уголка: 140×12 мм, $I_z = 602 \text{ см}^4$; $z_0 = 3,9$ см. Минимальный момент сопротивления для всего сечения балки

$$W_z = \frac{2I_z}{b - z_0} = \frac{2 \cdot 602}{14 - 3,9} = 119,21 \text{ см}^3.$$

Расчетный момент равен абсолютной величине максимального изгибающего момента, возникающего в жесткой заделке:

$$M_P = |M_{\max}| = Pl = 9 \text{ кНм},$$

а статические напряжения в балке

$$\sigma_{\text{ст}} = \frac{M_P}{W_z} = \frac{9 \cdot 10^3}{119,21 \cdot 10^{-6}} 10^{-6} = 75,5 \text{ МПа}.$$

2. Жесткость балки на изгиб

$$C = \frac{3EI}{l^3} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 602 \cdot 10^{-8}}{1^3} = 7,224 \cdot 10^6 \text{ Н/м}.$$

3. Определим частоту собственных колебаний двигателя и балки

$$\omega_c = \sqrt{\frac{Cg}{P}} = \sqrt{\frac{7,224 \cdot 10^6 \cdot 9,81}{9 \cdot 10^3}} = 88,74 \text{ с}^{-1}.$$

4. Вычислим частоту вынужденных колебаний

$$\omega_e = \frac{n_0 \pi}{30} = \frac{800 \cdot 3,14}{30} = 83,78 \text{ с}^{-1}.$$

5. Определим коэффициент нарастания колебаний β с учетом затухания.

Период собственных колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_c} = \frac{2 \cdot 3,14}{88,74} = 7,08 \cdot 10^{-2} \text{ с}.$$

Логарифмический декремент колебаний

$$\delta = nT = 5 \cdot 7,08 \cdot 10^{-2} = 0,354.$$

Найдем коэффициент динамичности из уравнения (59):

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_e^2}{\omega_c^2}\right)^2 + \left(\frac{\delta}{\pi}\right)^2 \frac{\omega_e^2}{\omega_c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{83,78^2}{88,74^2}\right)^2 + \frac{0,354^2}{3,14^2}}} = 6,39.$$

6. Вычислим величину центробежной силы инерции

$$S = 10^{-4} n_0^2 = 10^{-3} \cdot 800^2 = 640 \text{ Н}.$$

7. Определим динамический коэффициент

$$K_d = 1 + \frac{S}{P} \beta = 1 + \frac{640}{9 \cdot 10^3} 6,39 = 1,454.$$

8. Найдем наибольшие динамические напряжения в балке

$$\sigma_d = K_d \sigma_{ст} = 1,454 \cdot 75,5 = 109,8 \text{ МПа.}$$

9. Определим критическое число оборотов вала двигателя при резонансе

$$n_{кр} = \frac{\omega_c \cdot 30}{\pi} = \frac{88,74 \cdot 30}{3,14} = 847,4 \text{ об/мин.}$$

10. Коэффициент нарастания колебаний при резонансе

$$\beta = \frac{\pi}{\delta} = \frac{3,14}{0,354} = 8,875.$$

11. Динамический коэффициент при резонансе

$$K_d = 1 + \frac{S}{P} \beta = 1 + \frac{640}{9 \cdot 10^3} 8,875 = 1,631.$$

12. Вычислим наибольшее нормальное напряжение при резонансе

$$\sigma_d = K_d \sigma_{ст} = 1,631 \cdot 75,5 = 123,15 \text{ МПа.}$$

Выводы

При расчете колеблющейся системы необходимо учитывать ее статические и динамические деформации. Величина динамических напряжений в балке при частотах, близких к резонансным, существенна и обязательно должна быть учтена.

Задачи для домашнего задания 2

1. Электромотор установлен на двух двутавровых балках посередине пролета (рис. 40). Частота вращения ротора электродвигателя $n = 1200$ об/мин.

Подобрать сечение балок исходя из условия, чтобы частота собственных поперечных колебаний системы была на 30 % выше частоты возмущающей силы, возникающей вследствие динамической неуравновешенности ротора. Учесть массу балок.

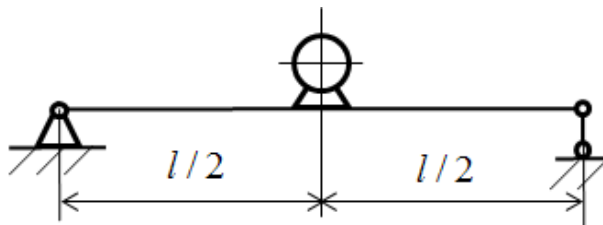


Рис. 40. Колебания электромотора

Дано: $m = 1000$ кг, $l = 5$ м, $[\sigma] = 160$ МПа, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Указание: вначале решить задачу без учета массы балок, а затем подобрать нужное сечение методом проб.

2. На двух балках двутаврового сечения № 22 установлен двигатель весом $Q = 20$ кН, совершающий $n = 500$ об/мин (рис. 41). Центробежная сила инерции, возникающая вследствие неуравновешенности вращающихся частей двигателя, $F = 5$ кН. Собственный вес балок и силы сопротивления можно не учитывать. Момент инерции двутавра № 22 $J_z = 2550$ см⁴, осевой момент сопротивления $W_z = 232$ см³. Определить наибольшие нормальные напряжения в балках.

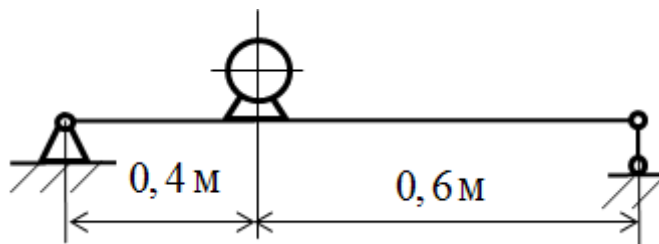


Рис. 41. Колебания двигателя

3. Балка с поперечным сечением прямоугольного профиля нагружена силой $Q = 12$ кН посередине пролета и испытывает действие возмущающей гармонической силы, амплитудное значение которой $F_0 = 0,4$ кН (рис. 42). Сила приложена в этом же сечении. Частота вынужденных колебаний $\omega_g = 18,3$ с⁻¹. Модуль упругости материала $E = 1,8 \cdot 10^5$ МПа. Найти амплитуду вынужденных колебаний балки.

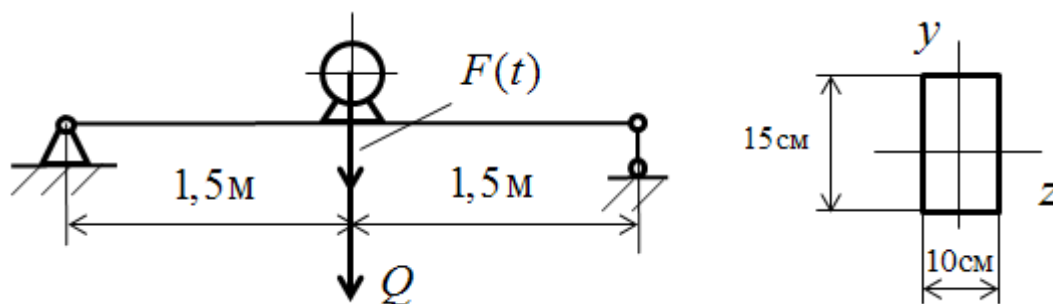


Рис. 42. Действие возмущающей гармонической силы

4. Электродвигатель весом $P = 90$ Н установлен на четырех симметрично расположенных цилиндрических винтовых пружинах, каждая из которых имеет десять витков при среднем диаметре витка $D = 6$ см и диаметре проволоки $d = 5$ мм (рис. 43). На оси электродвигателя укреплен стержень АВ, несущий на конце В груз весом $Q = 3$ Н, расположенный на расстоянии $r = 10$ см от оси электромотора. Определить критическое число оборотов электродвигателя, наибольшую деформацию и наибольшее касательное напряжение в пружинах.

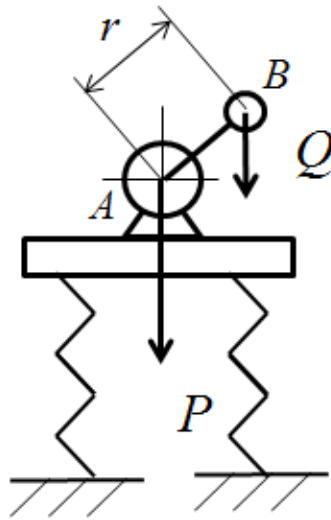


Рис. 43. Действие возмущающей силы

Весом пружин пренебречь. Коэффициент затухания колебаний принять $n = 4 \text{ с}^{-1}$. Модуль сдвига $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$.

Задание 3

Определение частоты собственных колебаний консоли крыла приближенными методами Рэлея и Ритца

Консоль крыла представляет собой систему с бесконечным числом степеней свободы, которую приближенно можно привести к системе с одной степенью свободы, если априори известна конфигурация системы при колебаниях, так называемая форма колебаний. Как известно, задавая определенную форму колебаний системе с распределенной массой и жесткостью, последняя сводится к системе с одной степенью свободы. Собственную частоту колебаний такой схематизированной системы находят с помощью энергетического способа.

Цель задания – определить изгибную жесткость консоли крыла самолета-прототипа на основании статистических данных о частотах собственных колебаний крыла.

Методика выполнения

Согласно методу Рэлея задается конфигурация колебательной упругой системы во время колебаний. Частоту колебаний определяют из баланса энергии системы.

Практически вместо того, чтобы задавать форму колебаний, можно приложить некоторую статическую нагрузку и определить по ней форму

упругой линии, которую принять за форму колебаний. Этот способ удобен тем, что граничные условия всегда будут удовлетворены автоматически, какой бы ни была выбрана нагрузка. Принимая нагрузку в виде какой-либо системы сил P_1, P_2, \dots, P_n , можно потенциальную энергию изгиба выразить через работу внешних сил

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i y_i,$$

где y_i – прогибы, вызываемые принятой системой нагрузок.

За систему сил P_i целесообразно принять фактическую нагрузку системы

$$P_i = m_i g.$$

Рэлей доказал теорему, согласно которой собственная частота колебаний (при априорных допущениях о форме колебаний) в результате расчетов всегда больше или равна собственной частоте колебаний, полученной на основе точных соотношений. Действительно, выбор формы упругой линии колебаний стержней равносителен введению в систему дополнительных ограничений (связей), приводящих сложную систему к системе, имеющей только одну степень свободы. Дополнительные ограничения (связи) могут только увеличить жесткость системы. Поэтому частота собственных колебаний всегда будет больше по сравнению с точным значением.

Рассмотрим свободные изгибные колебания консоли крыла (рис. 44), закрепленной к фюзеляжу (условно неподвижному). Представим её в виде балки с изгибной жесткостью $EI(z)$, переменной вдоль размаха.

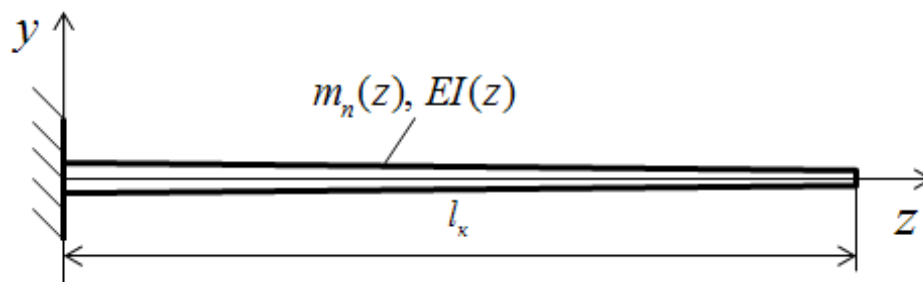


Рис. 44. Свободные изгибные колебания консоли крыла

Прогиб балки в процессе колебаний изменяется в соответствии с законом $y(z, t)$. Согласно методу Рэля функция, определяющая форму балки в произвольный момент времени,

$$y(z, t) = q(t)f(z), \tag{68}$$

где $f(z)$ – заранее назначаемая функция координаты z , $q(t)$ – неизвестная функция времени. После априорного задания $f(z)$ функция $q(t)$ будет

однозначно задавать конфигурацию системы, поэтому $q(t)$ часто называют обобщённой координатой.

Форму оси балки $f(z)$ выбирают с учётом заданного способа закрепления балки, т. е. граничных условий. При жестко заделанном конце балки (см. рис. 44) прогиб и поворот в месте защемления невозможны, т. е. при $z = 0$

$$y(0, t) = 0, \quad \frac{\partial y(0, t)}{\partial z} = 0$$

в любой момент времени. Тогда очевидно, что на функцию формы накладывают ограничения

$$f(0) = 0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{z=0} = 0. \quad (69)$$

Эти условия – кинематические, так как относятся к перемещениям и форме балки.

На свободном конце балки поперечная сила $Q_y(l_k)$ и изгибающий момент $M_{изз}(l_k)$ в любой момент времени t равны нулю:

$$\frac{\partial^2 y(l_k, t)}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 y(l_k, t)}{\partial z^3} = 0. \quad (70)$$

Тогда граничные условия, которые являются силовыми, с учетом выражения (68) примут вид

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)_{z=l_k} = 0, \quad \left(\frac{\partial^3 f}{\partial z^3}\right)_{z=l_k} = 0. \quad (71)$$

Перемещения балки в процессе ее свободных поперечных колебаний изменяются по гармоническому закону

$$y(z, t) = f(z) \sin(\omega_c t + \varepsilon), \quad (72)$$

где ω_c – частота колебаний, ε – начальная фаза, т. е. все точки балки одновременно достигают наибольших отклонений и положений равновесия.

Скорости точек оси балки

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \omega_c f(z) \cos(\omega_c t + \varepsilon), \quad (73)$$

максимальные скорости в положении равновесия

$$v_{max}(z) = \omega_c f(z), \quad (74)$$

а наибольшие отклонения точек балки

$$y_{max}(z) = f(z). \quad (75)$$

Максимальная потенциальная энергия деформации в положении наибольшего отклонения

$$U_{max} = \frac{1}{2} \int_0^{l_k} EI(z) (y''_{max}(z))^2 dz = \frac{1}{2} \int_0^{l_k} EI(z) (f(z)')^2 dz. \quad (76)$$

Максимальная кинетическая энергия

$$T_{max} = \frac{1}{2} \int_0^{l_k} m_n(z) v_{max}(z)^2 dz = \frac{\omega_c^2}{2} \int_0^{l_k} m_n(z) f(z)^2 dz, \quad (77)$$

где $m_n(z)$ – погонная масса консоли.

Согласно закону о сохранении полной механической энергии

$$T_{max} = U_{max}, \quad (78)$$

отсюда получим основную формулу Рэлея

$$\omega_c^2 = \frac{\int_0^{l_k} EI(z) (f(z)'')^2 dz}{\int_0^{l_k} m_n(z) f(z)^2 dz}. \quad (79)$$

Отметим, что частоты собственных изгибных колебаний крыла по первому тону для маневренных самолетов составляют 6,5...8,5 Гц, а для неманевренных – 1,5...5,0 Гц.

Если форму балки $f(z)$ задать точно, то частота собственных колебаний будет определена верно. Приближенное значение частоты всегда больше истинной.

Определим на основе метода Рэлея распределение изгибной жесткости консоли крыла $EI(z)$, если известна (по статистике) низшая изгибная частота колебаний крыла.

Пусть из статистики известна первая частота собственных колебаний крыла ω_{c1} . В качестве формы колебаний примем функцию

$$f(z) = \frac{z^2}{2l_k} - \frac{z^3}{3l_k^2} + \frac{z^4}{12l_k^3}, \quad (80)$$

удовлетворяющую всем граничным условиям задачи:

$$f(0) = 0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{z=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)_{z=l_k} = 0, \quad \left(\frac{\partial^3 f}{\partial z^3}\right)_{z=l_k} = 0. \quad (81)$$

Зная погонную массу консоли $m_n(z)$, состоящую из массы конструкции крыла и топлива, а также массу грузов m_i , записываем

$$\omega_c^2 = \frac{\int_0^{l_k} EI(z) (f(z)'')^2 dz}{\int_0^{l_k} m_n(z) f(z)^2 dz + \sum_{i=1}^N m_i f_i^2}, \quad (82)$$

где $f_i = f(z_i)$; z_i – координата груза; N – количество грузов.

Из соотношения (82) можно определить функцию $EI(z)$, если известна частота собственных колебаний ω_c . Например, если изгибная жесткость изменяется по линейному закону

$$EI(z) = EI(0)(1 - \bar{z}), \quad (83)$$

где

$$\bar{z} = \frac{z}{l_k},$$

то из выражения (82) можно найти значение изгибной жесткости $EI(0)$ крыла в месте прикрепления к фюзеляжу. Отметим, что допущение о линейном законе изменения изгибной жесткости крыла – довольно грубое.

При выполнении курсового проекта «Расчет на прочность крыла большого удлинения» необходимо определить изгибную жесткость крыла в расчетном сечении крыла для одного из случаев его нагружения. Желательно сопоставить значения изгибной жесткости крыла, полученные на основе двух подходов.

Метод Ритца

С помощью способа Рэля можно найти завышенную первую частоту. Более точные значения основной частоты, а также частоты высших тонов колебаний получают с помощью метода Ритца.

В методе Ритца в уравнение упругой линии при колебаниях вводят несколько параметров. Их величины подбирают так, чтобы частота основного тона колебаний была минимальной.

Например, поперечные колебания балки представим в виде

$$y(z) = a_1 y_1(z) + a_2 y_2(z) + \dots, \quad (84)$$

причем функция $y_i(z)$ удовлетворяют граничным условиям. Подставляя выражение (84) в формулу Рэля (79), видим, что результат зависит от коэффициентов a_1, a_2 и т. д. (точнее – от отношений a_i/a_j).

Коэффициенты подбирают из условия, чтобы формула (79) имела наименьшее значение частоты. Для этого все частные производные должны равняться нулю:

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \left[\frac{\int_0^{l_k} EI(z)(f(z)'')^2 dz}{\int_0^{l_k} m_n(z)f(z)^2 dz} \right] = 0.$$

После преобразований

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \int_0^{l_k} \left[EI \left(\frac{d^2 y}{dz^2} \right)^2 - \omega^2 m y^2 \right] dz = 0.$$

Очевидно, что таких уравнений столько, сколько членов в ряду (84). Эти уравнения однородные и линейные относительно коэффициентов a_1, a_2 .

Приравнивая определитель указанной системы уравнений нулю, получаем частотное уравнение.

Метод Ритца позволяет найти не только низшую частоту, но и значения высших частот, хотя и с меньшей точностью. При этом можно определить столько частот, сколько слагаемых принято в выражении (84).

Пример выполнения задания 3

Определение изгибной жесткости консоли крыла самолета Bombardier CRJ700 на основе метода Рэля

Исходные данные:

- взлётная масса самолета – 33000 кг;
- максимальная масса топлива – 8820 кг;
- площадь крыла – $68,5 \text{ м}^2$;
- размах крыла – 23,3 м;
- диаметр фюзеляжа – 2,7 м.

Геометрические данные консоли (рис. 45):

- размах стреловидной консоли с подфюзеляжной частью – 11,65 м;
- корневая хорда – 5,2 м;
- концевая хорда – 1,45 м;
- стреловидность по передней кромке – $26,5^\circ$.

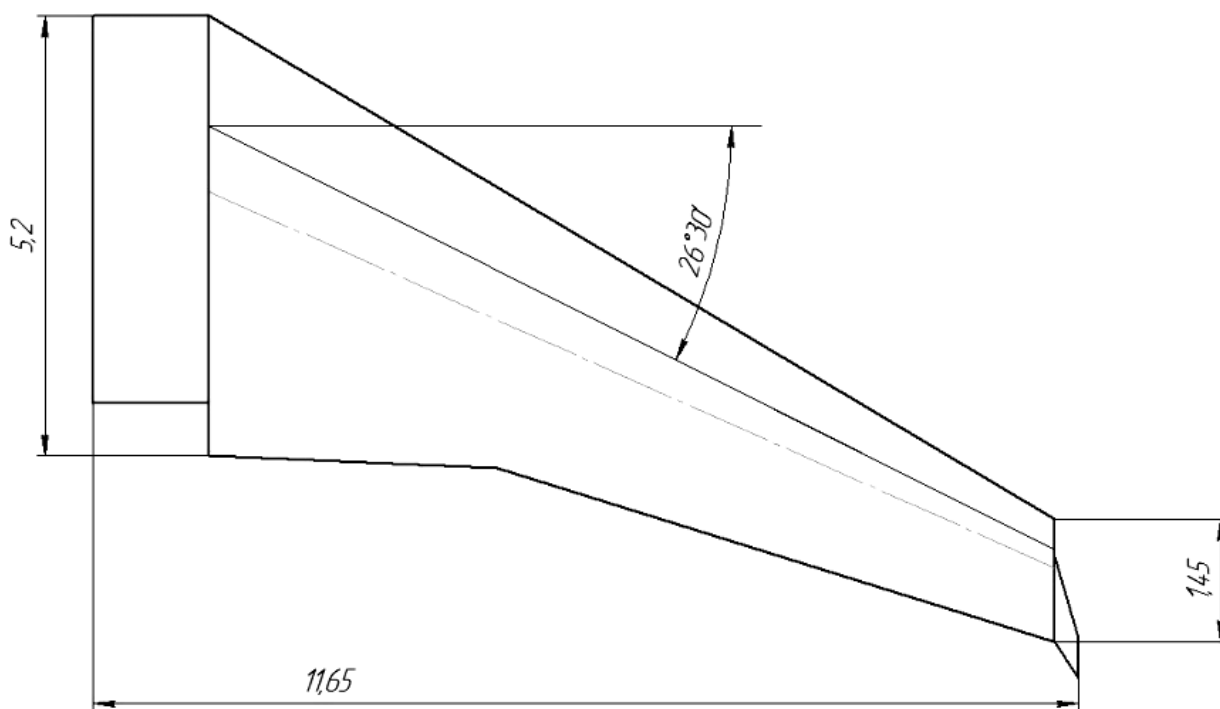


Рис. 45. Консоль крыла самолёта CRJ–700

Площадь консоли крыла

$$S = (S_{кр} - 0,25 \pi d_f^2) / 2 = 31,44 \text{ м}^2.$$

Чтобы определить собственную частоту колебаний консоли крыла, приведем ее к расчетной схеме «консольная балка». Так как крыло самолета стреловидное и угол по передней кромке более 15° (см. рис. 45), введем эквивалентное равновеликое по площади прямое крыло путем поворота оси жесткости стреловидного крыла так, чтобы ось была перпендикулярна бортовой нервюре (рис. 46).

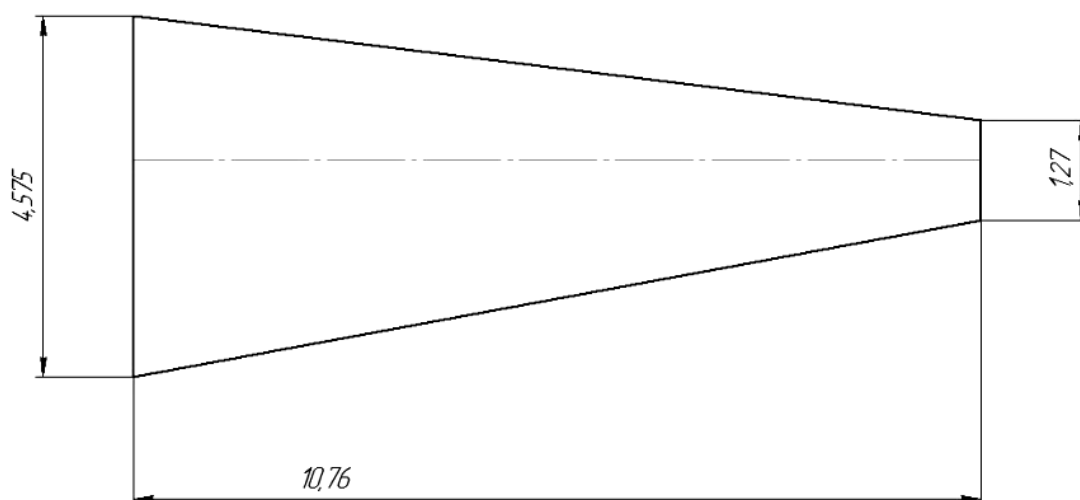


Рис. 46. Спряmlенная консоль крыла самолёта CRJ-700

Площадь спряmlенного крыла – $31,44 \text{ м}^2$. Размах спряmlенной консоли – $10,76 \text{ м}$, корневая хорда – $4,575 \text{ м}$, концевая хорда – $1,27 \text{ м}$.

Масса консоли по статистике составляет 5 % от взлетной массы:

$$m_{кон} = 0,05 m_{взл} = 0,05 \cdot 33000 = 1650 \text{ кг}.$$

Масса шасси самолета по статистике – 18,5 % от массы конструкции, которая составляет около 30 % от взлетной массы. Если предположить, что масса стойки, убирающейся в консоль, пропорциональна воспринимаемой нагрузке, то

$$m_{ш} = 0,185 \cdot 0,3 \cdot 0,45 \cdot 33000 = 824,18 \text{ кг}.$$

Получим закон распределения геометрических и массовых параметров консоли крыла по координате сечения вдоль оси жесткости. Будем считать, что консоль имеет единый профиль. Тогда параметры изменяются пропорционально хорде крыла b . Выразим текущую хорду через координату сечения z :

$$b(z) = b_0 - \frac{b_0 - b_k}{L_k} z,$$

где b_0 – корневая хорда; b_k – концевая хорда; L_k – длина спрямленной консоли.

Погонная масса конструкции

$$m(z)_{\text{констр}} = \frac{m_{\text{кон}} b(z)}{S_{\text{кон}}} = \frac{1650 b(z)}{31,44} = 52,48 \cdot b(z),$$

где $m_{\text{кон}}$ – масса консоли, $S_{\text{кон}}$ – площадь консоли.

Погонная масса топлива

$$m(z)_{\text{топлива}} = \frac{m_{\text{топлива}} b(z)}{S_{\text{кон}}} = \frac{4410 b(z)}{31,44} = 140,267 \cdot b(z),$$

где $m_{\text{топлива}}$ – масса топлива в консоли.

Суммарная погонная масса

$$m(z) = m(z)_{\text{констр}} + m(z)_{\text{топлива}} = 52,48 b(z) + 140,267 b(z) = 192,747 b(z).$$

Определим изгибную жесткость консоли. Допустим, что

$$EI(z) = EI(0) \left(1 - \frac{z}{L_k}\right),$$

где $EI(0)$ – изгибная жесткость в месте защемления.

Эта система имеет бесконечное число свобод. Воспользуемся методом Рэлея.

Задаемся первой изгибной формой консоли

$$f(z) = \frac{z^2}{2L_k} - \frac{z^3}{3L_k^2} + \frac{z^4}{12L_k^3}$$

и первой собственной частотой для данного типа самолета $f_{c1} = 2,4$ Гц, тогда

$$\omega_{c1} = 2,4 \cdot 2\pi = 15,08 \text{ рад/с.}$$

Из формулы Рэлея

$$\omega_{c1}^2 = \frac{\int_0^{L_k} EI(z)(f'')^2 dz}{\int_0^{L_k} m(z)f^2 dz + \sum_1^k m_i f_i^2},$$

где k – количество сосредоточенных грузов; m_i – масса сосредоточенного груза; f_i – перемещение i -го груза. Выразим $EI(0)$ через ω_{c1} :

$$EI(0) = \frac{\omega_{c1}^2 \int_0^{L_k} m(z)f^2 dz + \sum_1^k m_i f_i^2}{\int_0^{L_k} \left(1 - \frac{z}{L_k}\right) (f'')^2 dz},$$

$$EI(0) = \frac{15,08^2 \int_0^{10,76} 192,747 b(z) f^2 dz + 824,18 f_i^2}{\int_0^{10,76} \left(1 - \frac{z}{10,76}\right) (f'')^2 dz} = 1,088 \cdot 10^8 \text{ Нм}^2.$$

Выводы

Приближенные методы позволяют получить точное значение первой низшей частоты собственных колебаний, если задана точная форма колебаний.

Задание 4

Свободные и вынужденные колебания консоли крыла с двумя степенями свободы

Одна из актуальных задач динамической аэроупругости ЛА – исследование нагружения самолета от действия динамических нагрузок. Под динамическими понимают нагрузки, в образовании которых кроме внешних сил участвуют силы, обусловленные упругими колебаниями конструкции. Динамическое нагружение обычно возникает при полете в турбулентной атмосфере, при посадке и пробеге по аэродрому, дисбалансе двигателя, потерявшего лопатку. На военных самолетах динамическое нагружение возникает при действии ударной волны взрыва, стрельбе из стрелково-пушечного вооружения, катапультировании и др.

Требования об обязательности проведения динамического анализа нагрузок от порывов и при посадке тяжелых самолетов записаны в нормативных документах. При этом находят не только экстремальные динамические нагрузки, но и их повторяемость для определения ресурса конструкции.

Цель задания:

- получить уравнения движения консоли крыла как системы с двумя степенями свободы;
- найти формы и частоты собственных колебаний системы;
- определить динамическую реакцию системы на заданное возмущение, воспользовавшись методом заданных форм.

Методика выполнения

Рассмотрим невесомую консоль крыла, к которой прикреплены две сосредоточенные массы. Такая система имеет две степени свободы. Определим собственные частоты и формы колебаний. Знание динамических характеристик

конструкции (форм и частот собственных колебаний) позволяет применить удобный способ исследования динамики конструкции – метод заданных форм. На его основе необходимо исследовать динамику движения консоли крыла при ударе самолета о землю.

Определение частот и форм собственных колебаний консоли крыла с двумя степенями свободы

Определим частоты и формы собственных колебаний консоли крыла (рис. 47) для самолета-прототипа, воспользовавшись прямым и обратным способами составления уравнений движения.

Распределенную массу консоли крыла можно представить в виде двух сосредоточенных масс:

$$m_1 + m_2 = \int_0^{l_k} m_n dz,$$

где m_n – погонная масса консоли.

Представим крыло в виде балки с известной изгибной жесткостью $EI(z)$ вдоль размаха (см. задание 3). Считаем, что сосредоточенные массы m_1 и m_2 расположены на оси жесткости и вызывают изгиб в процессе поперечных колебаний консоли. Они могут совершать поперечные перемещения, поэтому система обладает двумя степенями свободы. В качестве обобщенных координат примем вертикальные смещения масс y_1 и y_2 .

При свободных колебаниях внешние силы на крыло не действуют, колебания совершаются под действием упругих и инерционных сил. Силы инерции действуют на балку, а силы упругости – на массы.

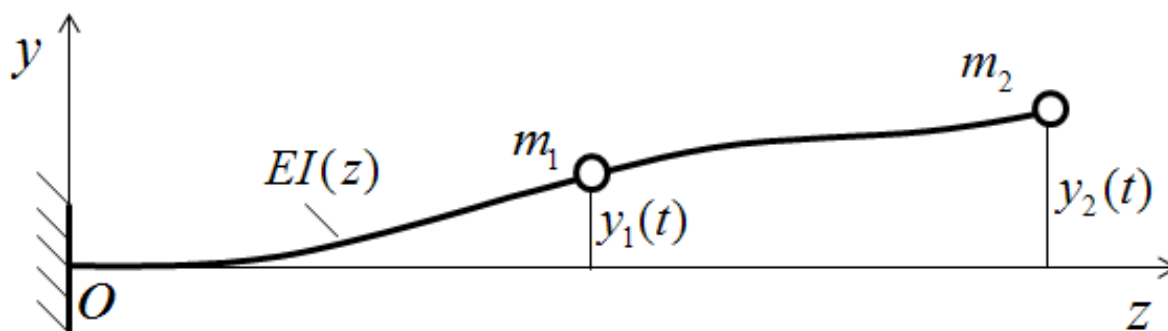


Рис. 47. Изгибные колебания консоли крыла

Запишем уравнения свободных колебаний консоли крыла на основе уравнений движения, составленных в *обратной форме*. Для этого к упругому безмассовому «скелету» – консоли крыла (рис. 48) приложим сосредоточенные массовые силы (силы инерции)

$$F_{ин1} = -m_1 \ddot{y}_1, \quad F_{ин2} = -m_2 \ddot{y}_2. \quad (85)$$

Под действием этих сил балка упруго деформируется. Считаем, что конструкция ведет себя линейно при нагружении и справедлив принцип суперпозиции. Упругие перемещения масс в линейно деформированной системе зависят от каждой из действующих сил:

$$\begin{aligned} y_1 &= F_{ун1} \delta_{11} + F_{ун2} \delta_{12}, \\ y_2 &= F_{ун1} \delta_{21} + F_{ун2} \delta_{22}, \end{aligned} \quad (86)$$

где δ_{ij} ($i, j = 1, 2$) – коэффициенты податливости (перемещение в i -й точке от действия единичной силы, приложенной в точке j).

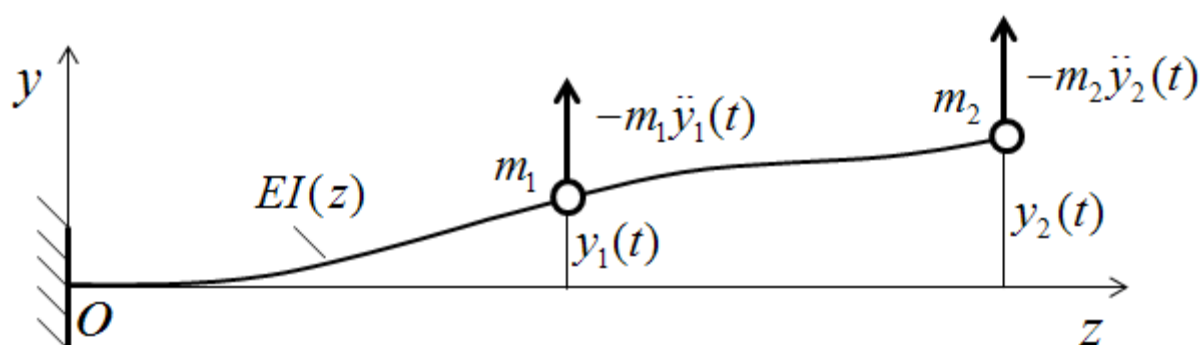


Рис. 48. Силы, действующие на упругую балку

После подстановки соотношений (85) в уравнения (86) получим дифференциальное уравнение движения, записанное в обратной форме:

$$\begin{aligned} y_1 &= -m_1 \ddot{y}_1 \delta_{11} - m_2 \ddot{y}_2 \delta_{12}, \\ y_2 &= -m_1 \ddot{y}_1 \delta_{21} - m_2 \ddot{y}_2 \delta_{22}. \end{aligned} \quad (87)$$

Определим коэффициенты податливости с помощью интеграла Мора

$$\delta_{ij} = \int_0^{l_k} \frac{M_i M_j}{EI} dz,$$

где $M_i(z)$ и $M_j(z)$ – изгибающие моменты в сечениях балки от действия единичных сил (рис. 49):

$$\begin{aligned} M_1(z) &= \left(\frac{l_k}{2} - z\right) \text{ при } z \leq \frac{l_k}{2}; \\ M_2(z) &= l_k - z. \end{aligned}$$

Дифференциальные уравнения движения (87) описывают свободные колебания консоли.

Решение системы находим в виде

$$\begin{aligned} y_1 &= A_1 \sin(\omega_c t + \varphi), \\ y_2 &= A_2 \sin(\omega_c t + \varphi), \end{aligned} \quad (88)$$

где A_1 и A_2 – амплитуды колебаний масс, ω_c – круговая частота собственных колебаний.

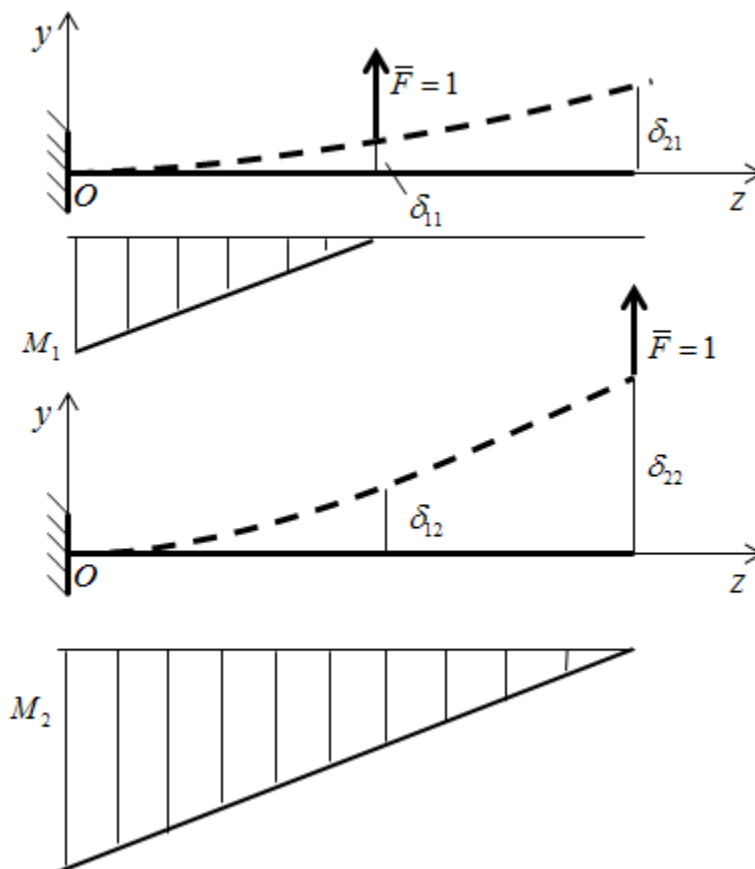


Рис. 49. Эпюры изгибающих моментов

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 &= -A_1 \omega_c^2 \sin(\omega_c t + \varphi), \\ \ddot{y}_2 &= -A_2 \omega_c^2 \sin(\omega_c t + \varphi). \end{aligned}$$

Тогда получаем следующие соотношения для амплитуд свободных колебаний:

$$\begin{aligned} A_1 &= m_1 A_1 \delta_{11} \omega_c^2 + m_2 A_2 \delta_{12} \omega_c^2, \\ A_2 &= m_1 A_1 \delta_{21} \omega_c^2 + m_2 A_2 \delta_{22} \omega_c^2 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} A_1(m_1 \delta_{11} \omega_c^2 - 1) + A_2(m_2 \delta_{12} \omega_c^2) &= 0, \\ A_1(m_1 \delta_{21} \omega_c^2) + A_2(m_2 \delta_{22} \omega_c^2 - 1) &= 0. \end{aligned} \quad (89)$$

Система линейных однородных уравнений относительно A_1 и A_2 имеет ненулевое решение при условии, если определитель, составленный из коэффициентов при амплитудах, равен нулю:

$$\begin{vmatrix} m_1 \delta_{11} \omega_c^2 - 1 & m_2 \delta_{12} \omega_c^2 \\ m_1 \delta_{21} \omega_c^2 & m_2 \delta_{22} \omega_c^2 - 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (90)$$

Уравнение (90) называется частотным, так как позволяет найти два значения собственных частот колебаний – ω_{c1} и ω_{c2} . Отметим, что $\omega_{c1} > \omega_{c2}$. Подставив эти частоты, например, в первое уравнение системы (89), получим соотношения для амплитуд.

При частоте ω_{c1} значение амплитуды колебаний в точке 1 при нормированном отклонении точки 2, равном единице ($A_{21} = 1$), таково:

$$A_{11} = \frac{m_2 \delta_{12} \omega_{c1}^2}{1 - m_1 \delta_{11} \omega_{c1}^2}, \quad (91)$$

а при ω_{c2}

$$A_{12} = \frac{m_2 \delta_{12} \omega_{c2}^2}{1 - m_1 \delta_{11} \omega_{c2}^2}. \quad (92)$$

На рис. 50 показаны нормированные формы колебаний, соответствующие первой и второй собственным частотам. При колебаниях консоли с первой собственной частотой ω_{c1} обе массы движутся в одну сторону. Колебания консоли со второй собственной частотой ω_{c2} характеризуются наличием неподвижной точки на балке – так называемого узла. Массы в любой момент времени движутся в разные стороны.

Таким образом, колебательный процесс в системе может проходить с частотами ω_{c1} и ω_{c2} собственных колебаний. Общее решение системы уравнений (87) должно содержать обе гармоники, поэтому запишем решение в виде

$$\begin{aligned} y_1 &= A_{11} \sin(\omega_{c1}t + \varphi_1) + A_{12} \sin(\omega_{c2}t + \varphi_2), \\ y_2 &= A_{21} \sin(\omega_{c1}t + \varphi_1) + A_{22} \sin(\omega_{c2}t + \varphi_2). \end{aligned} \quad (93)$$

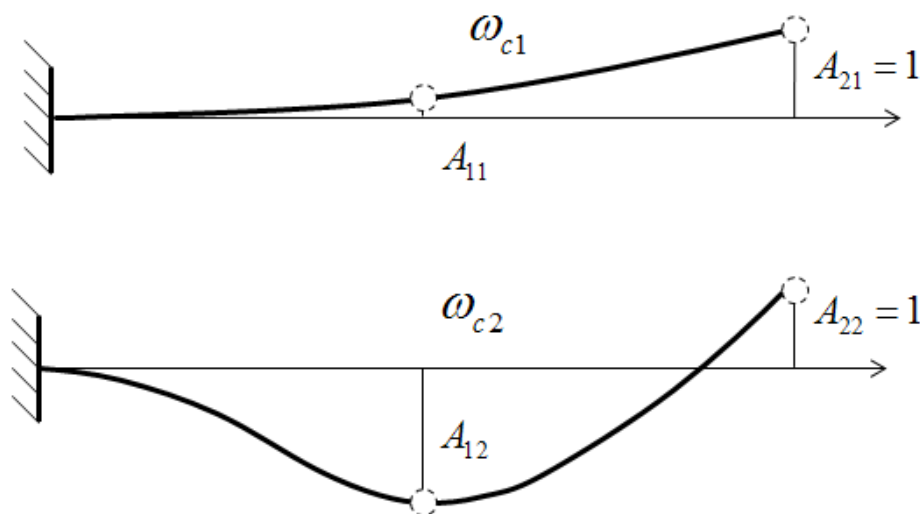


Рис. 50. Формы колебаний консоли крыла

Составим уравнения свободных колебаний консоли на основе уравнений движения в *прямой форме* (рис. 51). Для этого необходимо освободить массы, приложив к ним реакции отброшенных связей – действие сил упругости со стороны деформированной балки. Обозначим через $F_{уп1}$ и $F_{уп2}$ силы, которые необходимо приложить к балке, чтобы получить перемещения y_1 и y_2 .

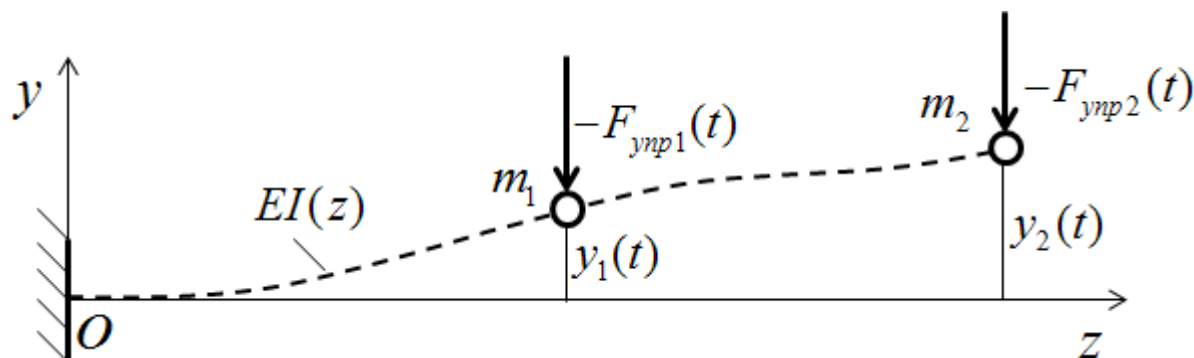


Рис. 51. Силы, действующие на сосредоточенные массы со стороны балки

Тогда силы, действующие на массы, противоположны по направлению и зависят от перемещений y_1 и y_2 :

$$-F_{уп1} = f_1(y_1, y_2), \quad -F_{уп2} = f_2(y_1, y_2).$$

Ввиду линейности системы функции f_1 и f_2 – линейные. Рассмотрим два состояния системы (рис. 52). На рис. 52, а показаны единичные реакции (коэффициенты жесткости), необходимые для создания единичного перемещения массы 1 при отсутствии перемещения массы 2, а на рис. 52, б – единичные реакции (коэффициенты жесткости) для создания единичного перемещения массы 2 при отсутствии перемещения массы 1.

Увеличим силы r_{11} и r_{21} в y_1 раз, а силы r_{12} и r_{22} – в y_2 раз. Очевидно, что при наложении этих нагрузок балка будет нагружена силами (рис. 53)

$$F_{уп1} = r_{11}y_1 + r_{12}y_2,$$

$$F_{уп2} = r_{21}y_1 + r_{22}y_2.$$

Согласно третьему закону Ньютона силы, действующие на массы 1 и 2, равны по величине и направлены противоположно. Тогда уравнения движения масс, вызванные силами $(-F_{уп1})$ и $(-F_{уп2})$, примут вид

$$m_1\ddot{y}_1 = -r_{11}y_1 - r_{12}y_2,$$

$$m_2\ddot{y}_2 = -r_{21}y_1 - r_{22}y_2. \tag{94}$$

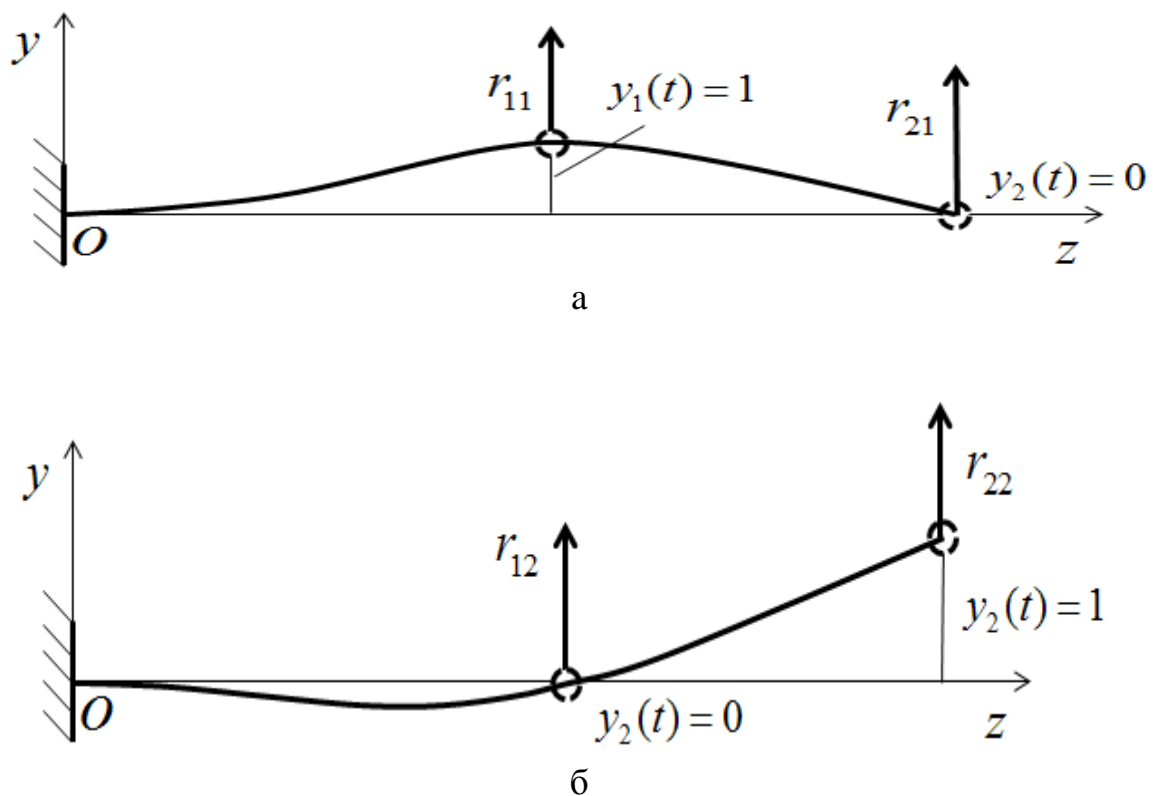


Рис. 52. Определение коэффициентов жесткости системы

Система уравнений (94) допускает непосредственное численное интегрирование, однако получить коэффициенты жесткости сложнее, чем вычислить коэффициенты податливости.

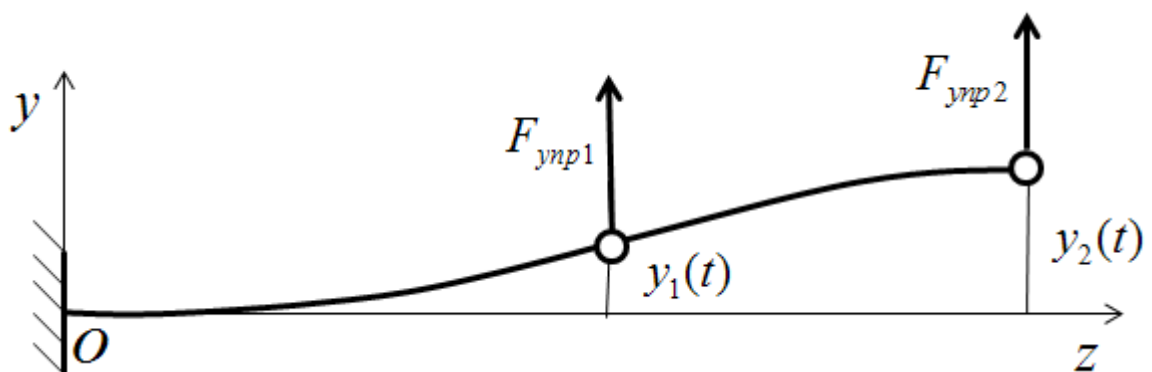


Рис. 53. Определение сил упругости через коэффициенты жесткости

Из системы дифференциальных уравнений свободных колебаний на основе прямого метода можно определить также частоты и формы собственных колебаний.

Матричный способ решения уравнений движения

Воспользуемся матричным подходом. Введем обозначения для матриц:

– диагональная матрица масс

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix};$$

– вектор-столбец упругих перемещений

$$Y = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix};$$

– вектор-столбец линейных ускорений масс

$$\ddot{Y} = \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix};$$

– квадратная симметричная матрица податливости

$$\delta = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix},$$

где $\delta_{12} = \delta_{21}$;

– квадратная симметричная матрица жесткости

$$r = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix},$$

где $r_{12} = r_{21}$.

Очевидно, что систему (87), записанную на основе обратного способа, можно представить в матричных обозначениях в виде

$$Y = -\delta M \ddot{Y}.$$

При гармоническом движении

$$\ddot{Y} = -\omega_c^2 Y.$$

Тогда

$$Y = \omega_c^2 \delta M Y. \tag{95}$$

Обозначив результат перемножения матриц

$$B = \delta M,$$

получим

$$B Y = \frac{1}{\omega_c^2} Y,$$

где

$$\lambda = \frac{1}{\omega_c^2}. \quad (96)$$

Из линейной алгебры известно, что если для матрицы B после умножения на вектор-столбец Y выполняется соотношение

$$BY = \lambda Y,$$

то λ — это собственное значение для матрицы B , а собственный вектор матрицы B — это форма собственных колебаний.

Частота собственных колебаний с учетом (96)

$$\omega_c = \sqrt{\frac{1}{\lambda}}. \quad (97)$$

Соотношение (94), записанное на основе прямого способа, можно представить в матричных обозначениях в виде

$$M \ddot{Y} = -rY. \quad (98)$$

Умножим выражение (98) слева на матрицу δ :

$$\delta M \ddot{Y} = -\delta rY.$$

Так как

$$Y = -\delta M \ddot{Y},$$

то произведение матриц податливости и жесткости

$$\delta r = E, \quad (99)$$

где единичная матрица

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, матрицы δ и r — взаимно обратные:

$$\delta = r^{-1}, \quad r = \delta^{-1}. \quad (100)$$

Обратный способ записи уравнений движения быстрее приводит к цели, так как уравнения (94) можно решать численно. При этом матрицу r получают как обратную матрицу δ .

Для непосредственного подсчета коэффициентов r для балки с двумя массами необходимо дважды решать один раз статически неопределимую задачу. Конечно, практически легче определить матрицу δ , а затем, обратив её, найти матрицу r .

Вынужденные колебания консоли крыла с двумя степенями свободы

Вынужденные колебания консоли проходят под действием возмущающих сил $F_{e1}(t)$ и $F_{e2}(t)$. На рис. 54 и 55 показаны схемы к применению обратного

и прямого способов составления уравнений движения системы при вынужденных колебаниях консоли.

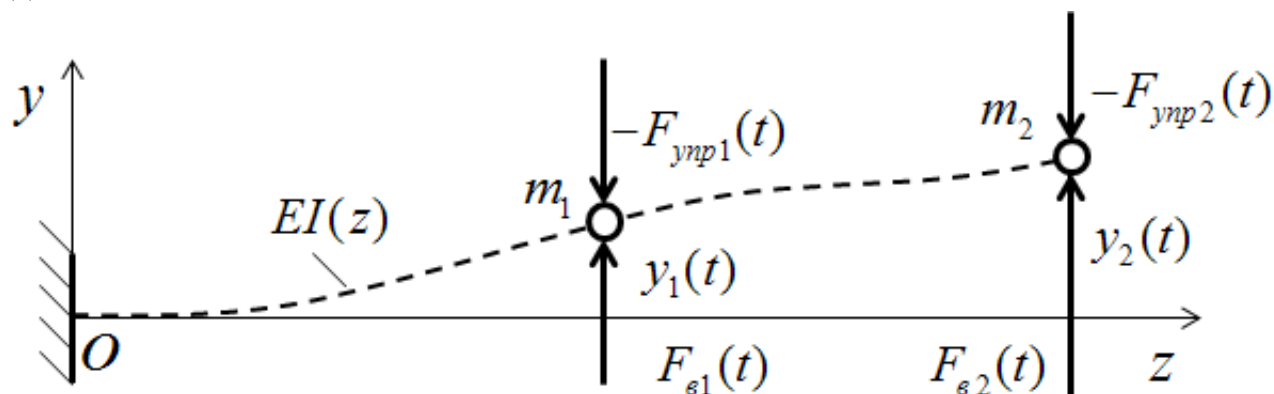


Рис. 54. Прямой способ составления уравнений движения

Получим уравнения на основе прямого способа. Уравнения движения масс, вызванные силами упругости ($-F_{ynp1}$) и ($-F_{ynp2}$) и возмущающими силами $F_{ei}(t)$ ($i = 1,2$), примут вид

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 &= -r_{11}y_1 - r_{12}y_2 + F_{e1}(t) \\ m_2 \ddot{y}_2 &= -r_{21}y_1 - r_{22}y_2 + F_{e2}(t). \end{aligned} \quad (101)$$

Система уравнений (101) допускает непосредственное численное интегрирование на ЭВМ, так как каждое уравнение содержит только одну старшую производную.

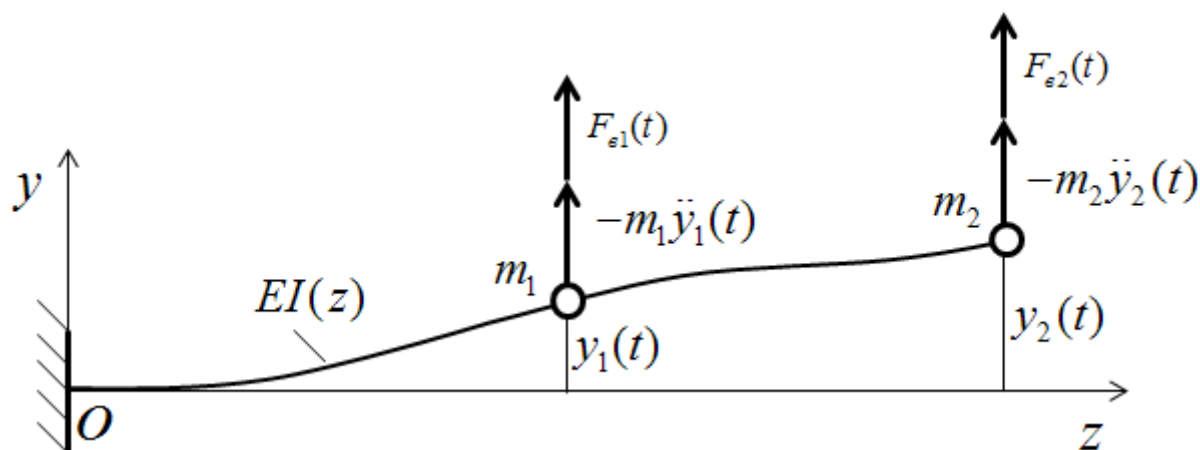


Рис. 55. Обратный способ составления уравнений движения

В матричных обозначениях система (101) имеет вид

$$m\ddot{Y} + rY = F_e,$$

где вектор-столбец внешних сил

$$F_{\epsilon} = \begin{Bmatrix} F_{\epsilon 1} \\ F_{\epsilon 2} \end{Bmatrix}.$$

Вынужденные колебания консоли крыла на основе метода заданных форм

Введем новые координаты $q_k(t)$ так, чтобы выполнялись соотношения

$$y_i(t) = \sum_{k=1}^n q_k(t) A_{ik}, \quad (102)$$

где A_{ik} — амплитуды перемещений точек при собственных частотах $\omega_c = \omega_{ck}$.

Тогда уравнения движения имеют вид

$$M_k \ddot{q}_k + p_k^2 M_k q_k = Q_k \quad (103)$$

или

$$\ddot{q}_k + p_k^2 q_k = \frac{Q_k}{M_k} \quad (k = 1, 2), \quad (104)$$

где обобщенная масса

$$M_k = \sum_{i=1}^2 m_i A_{ik}^2, \quad (105)$$

а обобщенная сила

$$Q_k = \sum_{i=1}^2 F_{\epsilon i} A_{ik}. \quad (106)$$

Если учесть конструкционное демпфирование, которое складывается из трения в местах сочленений элементов конструкции и рассеяния энергии внутри материала, то получим систему дифференциальных уравнений упругих колебаний крыла при действии нестационарной нагрузки

$$\ddot{q}_k + 2\chi_k p_k \dot{q}_k + p_k^2 q_k = \frac{Q_k}{M_k} \quad (k = 1, 2), \quad (107)$$

где χ_k — коэффициенты конструкционного демпфирования диагональной матрицы χ .

Уравнения удобны при расчетах, так как в соотношениях (107) нет ни инерционного, ни упругого взаимодействия между неизвестными обобщенными координатами q_k . Обобщенные силы вычисляются для известных значений параметров движения и деформирования ЛА.

Гармонические возмущающие силы

Если на систему действуют гармонические возмущающие силы с различными фазами и частотой ω_g

$$P_i(t) = P_i \cos(\omega_g t - \varphi_i), \quad (108)$$

то их можно представить как суммы

$$P_i(t) = P_{i,c} \cos \omega_g t + P_{i,s} \sin \omega_g t, \quad (109)$$

где

$$P_{i,c} = P_i \cos \varphi_i, \quad P_{i,s} = P_i \sin \varphi_i.$$

Ввиду линейности системы ее движение представляет собой сумму движений, вызываемых силами, пропорциональными $\cos \omega_g t$ и $\sin \omega_g t$ в отдельности. Рассмотрим движение, вызываемое силами, пропорциональными $\cos \omega_g t$. В этом случае обобщенная сила, соответствующая координате q_k , также пропорциональна $\cos \omega_g t$:

$$Q_k^{(c)} = \sum_{i=1}^2 P_{i,c} A_{ik} \cos \omega_g t.$$

Уравнение

$$\ddot{q}_k + \omega_{ck}^2 q_k = \left[\sum_{i=1}^2 P_{i,c} A_{ik} / M_k \right] \cos \omega_g t \quad (110)$$

имеет стационарное решение

$$q_k = \frac{\sum_{i=1}^2 P_{i,c} A_{ik}}{M_k \omega_{ck}^2} \frac{1}{1 - \omega_g^2 / \omega_{ck}^2} \cos \omega_g t. \quad (111)$$

Соответственно движение *любой точки* системы под действием сил, пропорциональных $\cos \omega_g t$, определяется выражением ($i = 1, 2$)

$$x_i^{(c)} = \sum_{k=1}^2 q_k A_{ik} = \cos \omega_g t \sum_{k=1}^2 \frac{\sum_{j=1}^2 P_{jc} A_{jk}}{(1 - \omega_g^2 / \omega_{ck}^2) M_k \omega_{ck}^2} A_{ik}. \quad (112)$$

Аналогично силы, пропорциональные $\sin \omega_g t$, вызовут перемещения

$$x_i^{(s)} = \sin \omega_g t \sum_{k=1}^2 \frac{\sum_{j=1}^n P_{js} A_{jk}}{(1 - \omega_g^2 / \omega_{ck}^2) M_k \omega_{ck}^2} A_{ik} \quad (113)$$

и полное движение выражается суммой

$$x_i = x_i^{(c)} + x_i^{(s)}.$$

Полученные выражения показывают, что *при гармоническом возмущении система колеблется с частотой возмущающей силы, а форма ее меняется в зависимости от частоты*. Если частота возбуждения приближается к одной из собственных частот системы, то величина соответствующих членов в выражениях (112) и (113) неограниченно возрастает. Таким образом, резонанс возникает при совпадении частоты возмущения с любой из собственных частот системы. При резонансе на частоте ω_{ck} форма вынужденных колебаний системы совпадает с k -й собственной формой, поскольку остальные слагаемые в рядах (112) и (113) становятся пренебрежимо малыми по сравнению с резонирующими.

При гармоническом возмущении метод главных координат не является наиболее экономичным способом решения задачи. Им целесообразно пользоваться только в том случае, если собственные частоты и формы колебаний уже известны. При действии гармонических возмущающих сил, пропорциональных, например, $\cos \omega_g t$, следует искать решение уравнений движения в форме

$$y_i = A_i \cos \omega_g t.$$

Подставляя эти значения в уравнения движения (записанные в прямой или обратной форме), получаем систему линейных неоднородных уравнений относительно A_i .

Пример выполнения задания 4

Определение частот и форм собственных колебаний консоли крыла и ее динамической реакции при ударе ЛА о землю

Исходные данные для решения задачи – геометрические и массовые параметры спрямленной консоли крыла самолета-прототипа.

Длина консоли крыла $l_k = 16$ м. Пусть при посадке израсходовано 50 % топлива и суммарная масса консоли составляет

$$m_{\Sigma} = m_{\text{конс}} + 0,5 \cdot m_{\text{топлива}} = 5040 \text{ кг.}$$

Представим конструкцию с бесконечным числом степеней свободы в виде системы с двумя сосредоточенными массами. Расчетная схема такой системы – безмассовая консольная балка с двумя сосредоточенными массами.

Величины масс

$$m_1 = 0,7m_{\Sigma}, \quad m_2 = 0,3m_{\Sigma}.$$

Масса m_1 расположена посередине консоли, а масса m_2 – на конце крыла.

Изгибная жесткость консоли в месте защемления получена в задании 3 методом Рэлея:

$$EI(0) = \frac{\omega_1^2 \int_0^{L_k} m(z) f^2 dz + \sum_1^k m_i f_i^2}{\int_0^{L_k} (1 - z/L_k) (f'')^2 dz} = 1,51 \cdot 10^8 \text{ Нм}^2.$$

Изгибную жесткость консоли по размаху считаем постоянной.

При посадке известна вертикальная перегрузка ЛА в центре масс (рис. 56).

Ускорение самолета, вызванное поверхностными силами, направлено вверх и в произвольный момент времени

$$a_{y_{цм}}(t) = n_y(t)g.$$

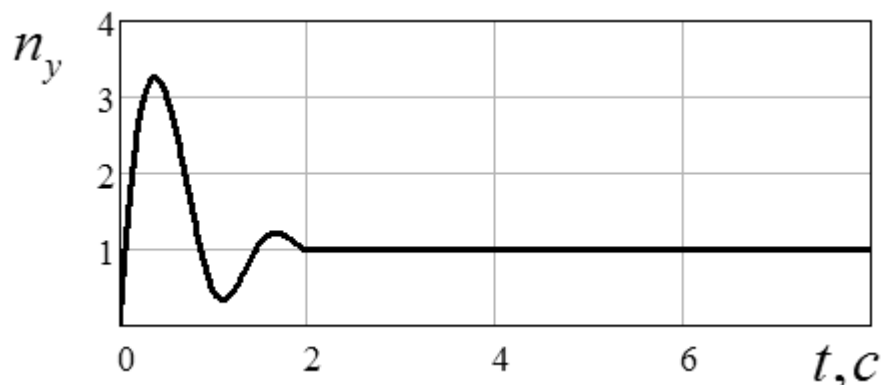


Рис. 56. Изменение вертикальной перегрузки ЛА в центре масс при ударе о землю

Решение

Определение частот и форм собственных колебаний консоли крыла

Коэффициенты податливости системы

$$\delta_{11} = 1,22 \cdot 10^{-6}; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = 3,05 \cdot 10^{-6}; \quad \delta_{22} = 9,75 \cdot 10^{-6}.$$

Матрицы коэффициентов податливости и жесткости имеют такой вид:

$$\delta = 10^{-6} \begin{bmatrix} 1,22 & 3,05 \\ 3,05 & 9,75 \end{bmatrix},$$

$$r = \delta^{-1} = 10^6 \begin{bmatrix} 3,76 & -1,17 \\ -1,17 & 0,47 \end{bmatrix}.$$

Матрица масс системы

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 3,53 & 0 \\ 0 & 1,51 \end{bmatrix}.$$

Матрица

$$B = \delta M = \begin{bmatrix} 4,3 \cdot 10^{-3} & 4,61 \cdot 10^{-3} \\ 0,011 & 0,015 \end{bmatrix}$$

позволяет найти собственные частоты и формы колебаний из соотношения

$$BY = (1/\omega_c^2)Y, \quad \lambda = 1/\omega_c^2,$$

где вектор-столбец упругих перемещений

$$Y = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}.$$

Собственные значения матрицы

$$\lambda = \begin{Bmatrix} 7,46 \cdot 10^{-4} \\ 0,019 \end{Bmatrix},$$

а частоты, Гц,

$$f = \begin{Bmatrix} 1,18 \\ 5,78 \end{Bmatrix}.$$

Тот же результат можно получить, рассматривая частотное уравнение

$$F(\omega_c) = \begin{vmatrix} m_1 \delta_{11} \omega_c^2 - 1 & m_2 \delta_{12} \omega_c^2 \\ m_1 \delta_{21} \omega_c^2 & m_2 \delta_{22} \omega_c^2 - 1 \end{vmatrix} = 0.$$

На рис. 57 показано графическое решение этого уравнения.

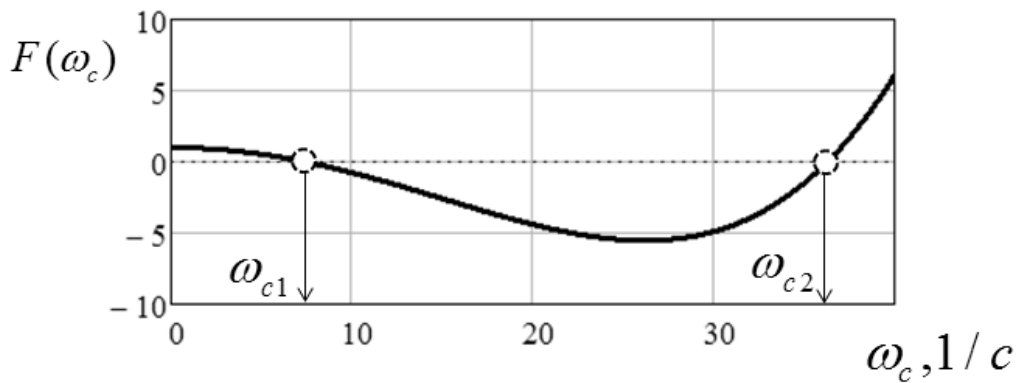


Рис. 57. Решение частотного уравнения

Формы собственных изгибных колебаний в виде отклонения двух масс показаны на рис. 58. Они нормированы так, что перемещение второй массы равняется единице для первой $f_1(z)$ и второй $f_2(z)$ форм колебаний.

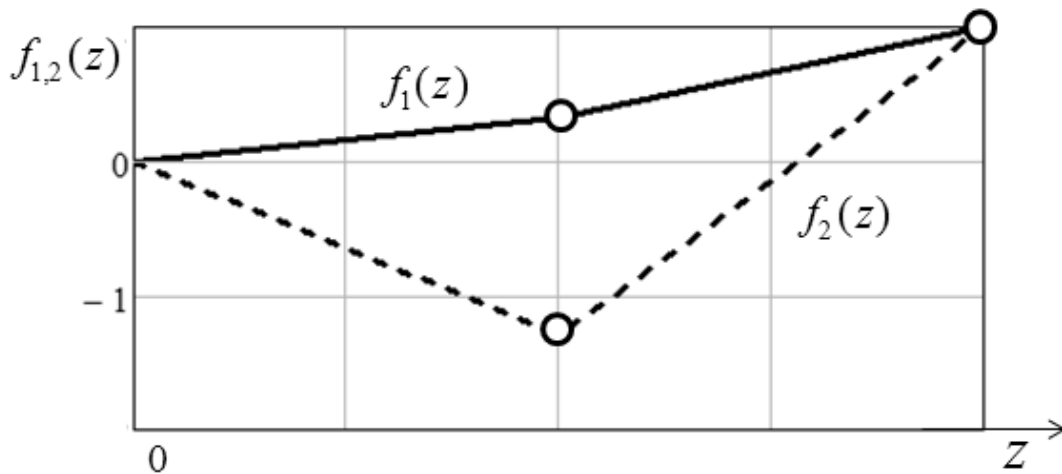


Рис. 58. Формы собственных изгибных колебаний консоли крыла

Исследуем динамическую реакцию консоли крыла при ударе ЛА о землю при посадке (рис. 59).

На основании уравнений

$$m_1 \ddot{y}_1 = -r_{11}y_1 - r_{12}y_2 + F_{e1}(t),$$

$$m_2 \ddot{y}_2 = -r_{21}y_1 - r_{22}y_2 + F_{e2}(t),$$

где в качестве внешних сил, действующих на массы, следует приложить силы инерции переносного движения неинерциальной системы отсчета, связанной с центром масс ЛА:

$$\vec{F}_{un i}(t) = -m_i \vec{a}_{цм}(t), \quad i = 1, 2,$$

где $\vec{a}_{цм}(t)$ – вектор ускорения центра масс ЛА;

$\vec{F}_{un i}(t)$ – сила инерции, действующая на i -ю массу.

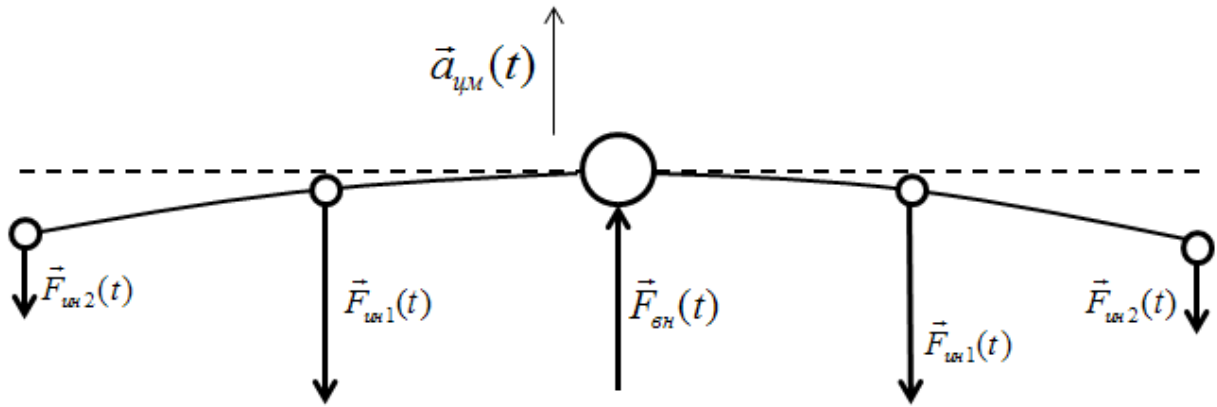


Рис. 59. Действие поверхностных и инерционных сил на крыло

Следует отметить, что влиянием возмущенного движения крыла на силы, действующие со стороны шасси на ЛА, пренебрегаем. Это упрощает расчеты.

Согласно методу заданных форм уравнения движения можно представить в виде

$$M_k \ddot{q}_k + p_k^2 M_k q_k = Q_k$$

или

$$\ddot{q}_k + p_k^2 q_k = \frac{Q_k}{M_k} \quad (k = 1, 2),$$

где обобщенная масса

$$M_k = \sum_{i=1}^2 m_i A_{ik}^2$$

и обобщенная сила

$$Q_k = \sum_{i=1}^2 F_{gi} A_{ik}$$

известны.

Решаем систему дифференциальных уравнений численно в пакете Mathcad. Считаем, что в момент времени $t = 0$ крыло было неподвижное и недеформированное.

В дальнейшем в крыле возбуждаются упругие колебания. Трением в системе пренебрегаем.

На рис. 60 показано изменение обобщенных координат $q_1(t)$ и $q_2(t)$. Как видно, упругие колебания по второй форме практически не видны. Это связано с характером внешнего воздействия – совершают работу силы инерции в основном на перемещениях по первой форме.

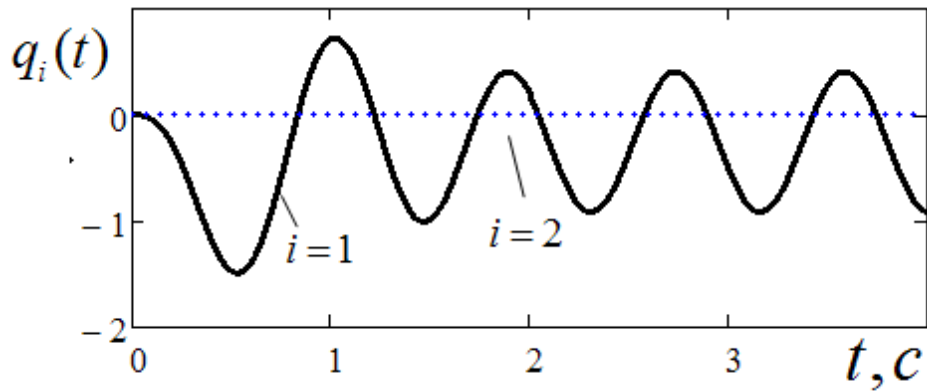


Рис. 60. Изменение обобщенных координат $q_1(t)$ и $q_2(t)$ во времени

В то же время вклад обобщенного ускорения по второй форме существенен (рис. 61).

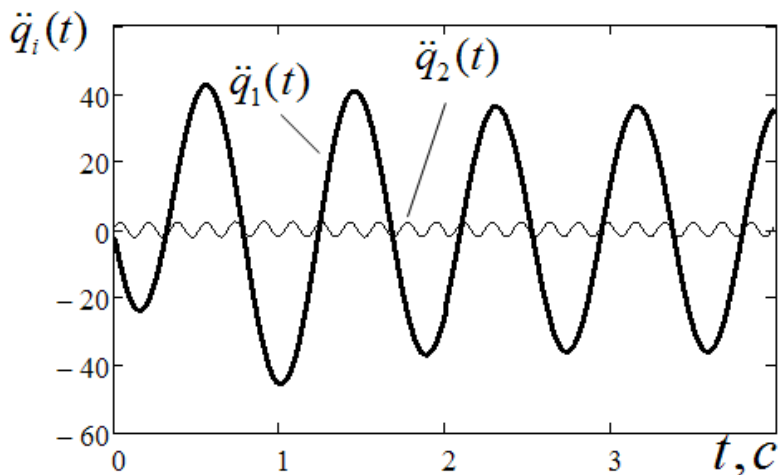


Рис. 61. Изменение обобщенных ускорений $\ddot{q}_1(t)$ и $\ddot{q}_2(t)$ во времени

На рис. 62 показано смещение во времени двух масс относительно их равновесного состояния. Из рис. 62 видно, что сразу после удара о землю обе массы смещаются вниз. В дальнейшем движение масс в основном происходит по первой форме, вклад второй формы в упругие перемещения практически не заметен.

В начальный момент времени деформации крыла наибольшие, а затем после прекращения действия перегрузки в конструкции возбуждаются упругие колебания меньшей амплитуды. Напомним, что трение в системе отсутствует, поэтому после прекращения действия перегрузки система совершает незатухающие свободные колебания.

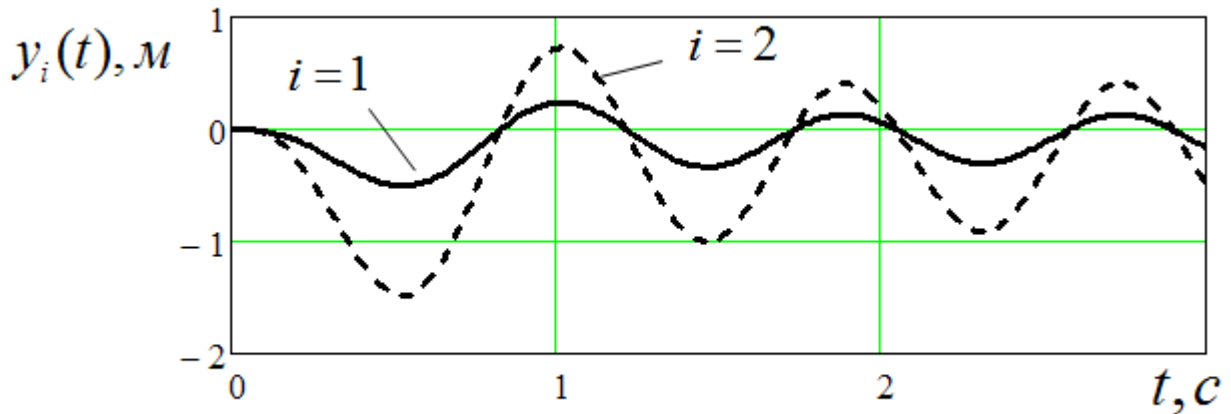


Рис. 62. Вертикальные перемещения точек крыла при ударе

Скорости упругих деформаций изменяются при ударе так, как показано на рис. 63.

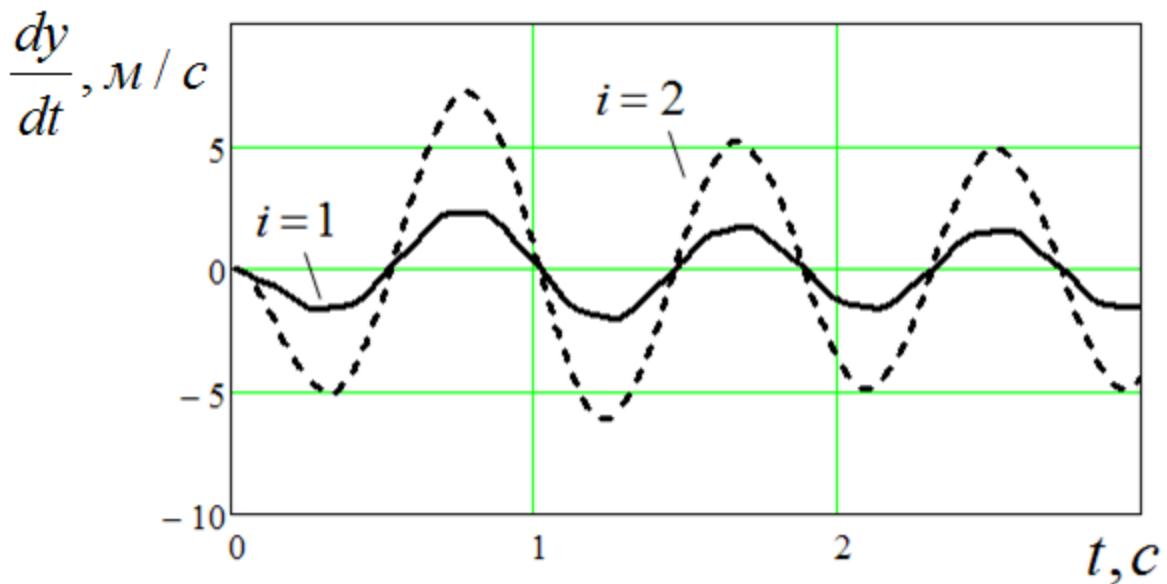


Рис. 63. Скорости упругих деформаций крыла

Важной информацией является перегрузка в точках крыла

$$n_i = a_i/g,$$

так как она определяет нагруженность конструкции. На рис. 64 показано изменение перегрузки во времени после удара ЛА о землю. Хорошо виден вклад второго тона упругих колебаний в деформирование консоли.

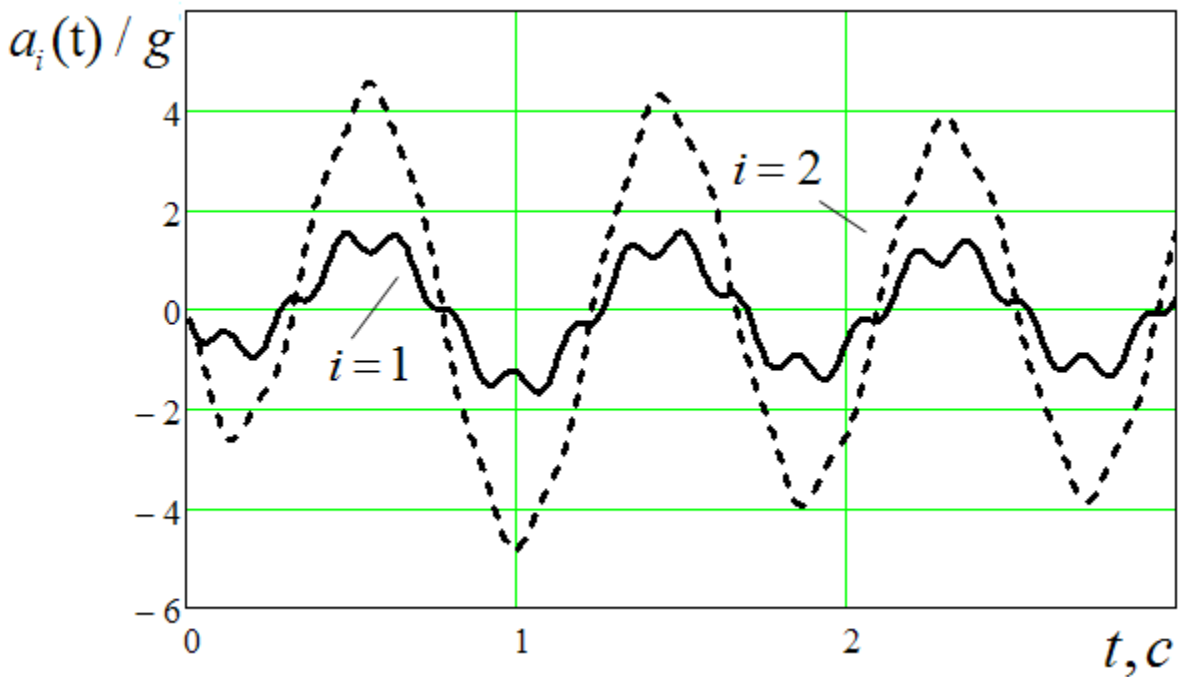


Рис. 64. Изменение перегрузки на крыле после удара о землю

Поперечная сила на двух участках крыла возникает от действия со стороны масс сил инерции, вызванных поступательным ускоренным движением самолета и ускорениями, связанными с упругими колебаниями консоли (рис. 65):

$$F_1(t) = -(\ddot{y}_1 + n_y(t)g)m_1,$$

$$F_2(t) = -(\ddot{y}_2 + n_y(t)g)m_2.$$

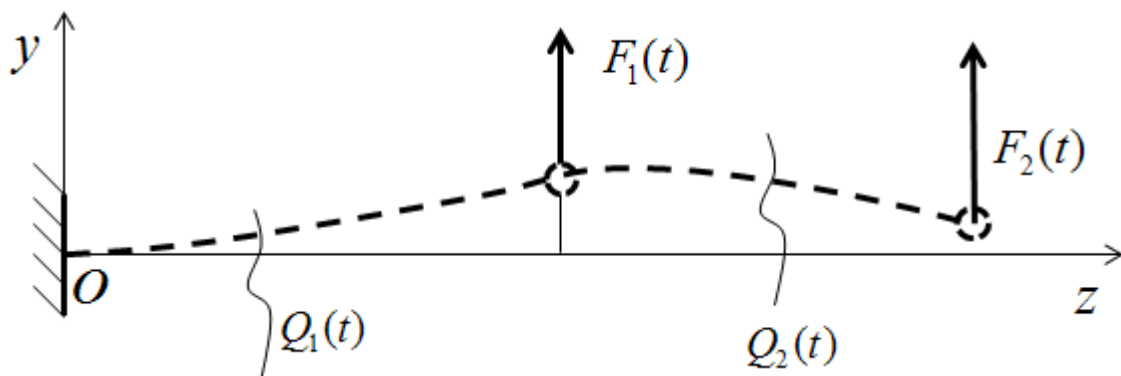


Рис. 65. Поперечная сила на двух участках крыла

На рис. 66 показаны статические значения поперечной силы на стоянке ЛА, а также изменение поперечной силы на участках крыла. Как видно, имеется значительное динамическое увеличение нагруженности крыла при посадке и ударе.

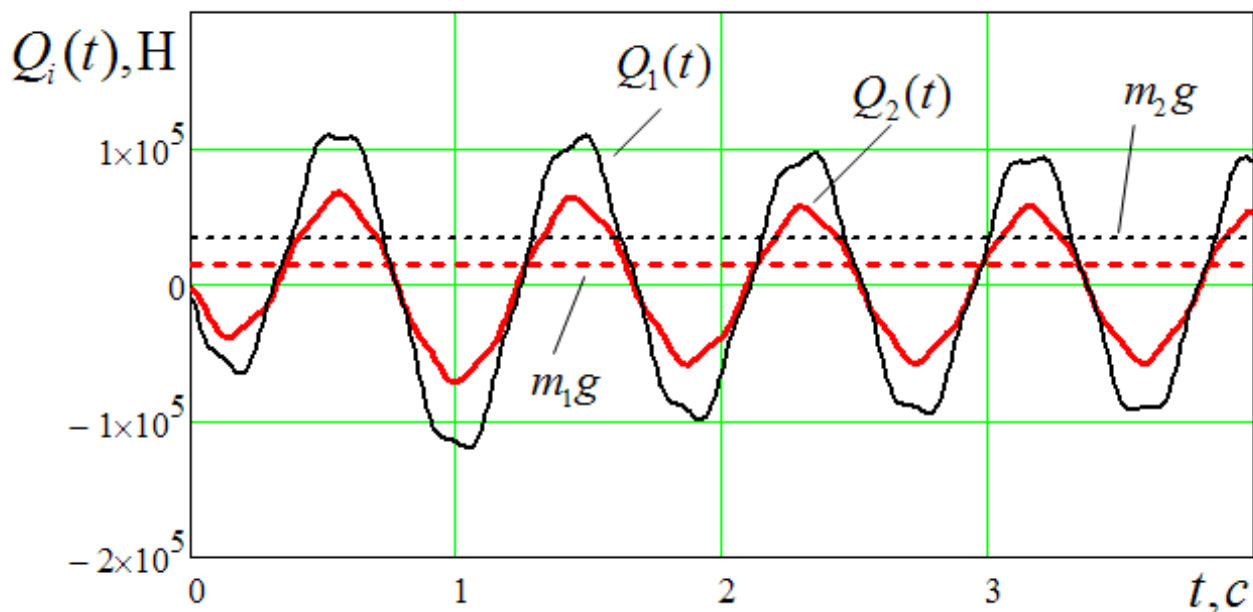


Рис. 66. Изменение поперечной силы на участках крыла при ударе

Выводы

При определении расчетных нагрузок на конструкцию ЛА обычно считают, что самолет абсолютно жесткий. Элементы конструкций, рассчитанные по нагрузкам, вычисленным на основании этого предположения, могут разрушиться вследствие дополнительного динамического нагружения.

Внешняя быстро прикладываемая нагрузка является не только причиной поступательного движения и вращения самолета, но и возбуждает колебания конструкции. Силы инерции, связанные с этими колебаниями, обуславливают возникновение дополнительных динамических нагрузок.

Реакция упругой конструкции при посадке ЛА зависит от ее собственных динамических характеристик (частот и форм собственных колебаний) и вида внешнего воздействия.

При исследовании динамической реакции конструкции достаточно удерживать несколько низших тонов упругих колебаний, а в случае высокочастотного внешнего воздействия – большее количество собственных форм.

Из анализа приведенных данных видно, что исследовать прочность и усталость конструкции нужно с учетом динамики конструкции.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Авиационные правила "Нормы летной годности самолетов транспортной категории. – М. : МАК, 1993. – Ч. 25 (АП – 25). – 483 с.

Бисплингхофф, Р. Л. Аэроупругость [Текст] / Р. Л. Бисплингхофф, Х. Эшли, Р. Л. Хелфмен. – М. : Изд-во иностр. лит., 1958. – 799 с.

Образцов, И. Ф. Строительная механика летательных аппаратов [Текст] / И. Ф. Образцов. – М. : Машиностроение, 1986. – 535 с.

Бидерман, В. Л. Прикладная теория механических колебаний [Текст] / В. Л. Бидерман. – М. : Высш. шк., 1972. – 416 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
Задание 1. Определение частоты собственных колебаний механической системы с одной степенью свободы.....	18
Задание 2. Вынужденные колебания механической системы с одной степенью свободы.....	54
Задание 3. Определение частоты собственных колебаний консоли крыла приближенными методами Рэлея и Ритца.....	70
Задание 4. Свободные и вынужденные колебания консоли крыла с двумя степенями свободы.....	78
Библиографический список.....	99

Навчальне видання

Онищенко Володимир Михайлович

**ВІЛЬНІ Й ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ КОНСТРУКЦІЇ ЛА
З ДЕКІЛЬКОМА СТЕПЕНЯМИ ВІЛЬНОСТІ**

(Російською мовою)

Редактор В. І. Філатова

Зв. план, 2016

Підписано до видання 06.06.2016

Ум. друк. арк. 5,5. Обл.- вид. арк. 6,25. Електронний ресурс

Видавець і виготовлювач

Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського

«Харківський авіаційний інститут»

61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17

[http:// www.khai.edu](http://www.khai.edu)

Видавничий центр «ХАІ»

61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17

izdat@khai.edu

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного
реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції
сер. ДК № 391 від 30.03.2001